Úvod do analýzy na varietách

Demeter Krupka

Předmluva

Toto skriptum je věnováno základům diferenciálního a integrálního počtu na hladkých varietách. Vzniklo na základě autorových přednášek na Přírodovědecké fakultě UJEP v Brně v období 1979–84 pro studenty odborných matematických specializací (výběrová přednáška z globální analýzy a přednáška z topologie a geometrie) a pro studenty odborné fyziky (základní kurs analýzy).

Je určeno především těm studentům, kteří se chtějí hlouběji seznámit s moderní globální analýzou a vytvořit si předpoklady pro další studium této discipliny a jejích četných aplikací ve fyzikálních vědách.

Poznámky k použité symbolice

Množinová operace $\subset$ nevylučuje rovnost dvou množin. Budeme-li uvažovat *vlastní* podmnožinu dané množiny, na příslušném místě to zdůrazníme. Množinu všech přirozených čísel značíme symbolem $\mathbf{N}$, těleso reálných čísel s přirozenou topologií symbolem $\mathbf{R}$.

1. Úvod do analýzy na varietách

1.1. Základní topologické pojmy

Říkáme, že na neprázdné množině X je dána *topologická struktura* τ, je-li dán systém τ podmnožin množiny X, splňující tyto podmínky:

(1) Množina prázdná $\emptyset$ a množina X patří systému τ.
(2) Průnik libovolných dvou množin systému τ je prvkem systému τ.
(3) Sjednocení libovolného podsystému systému τ je prvkem systému τ.

Topologická struktura na množině X se nazývá také *topologie* na X. Množina X, na níž je dána topologie τ, se nazývá *topologický prostor*. Prvky systému τ se nazývají *otevřené množiny*. Otevřená množina, obsahující bod $x \in X$, se nazývá *okolí* bodu x.

Topologický prostor X se nazývá *oddělitelný* nebo také *Hausdorffův*, existují-li ke každým dvěma různým bodům $x_1,\ x_2 \in X$ otevřené množiny $U_1,\ U_2$ tak, že $x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Buď X topologický prostor, τ jeho topologie. Podsystém τ_0 systému τ se nazývá *báze* topologie τ, jestliže každá množina z τ je sjednocením jistých množin z τ_0. Topologie τ se přitom nazývá *generovaná* bází τ_0. Každá báze generuje jedinou topologii; daná topologie může mít ovšem více bází.

Následující tvrzení lze použít k efektivnímu zavedení topologie na množinách nebo k prověření toho, zda daný systém množin definuje jistou topologii.

TEORÉM 1.1. *Buď X neprázdná množina. Systém τ_0 podmnožin množiny X je bází nějaké topologie na X tehdy a jen tehdy, když $\emptyset \in \tau_0$, X je sjednocením množin z τ_0 a k libovolným dvěma množinám $U,\ V \in \tau_0$ takovým, že $U \cap V \neq \emptyset$, a každému bodu $x \in U \cap V$ existuje množina $W \in \tau_0$ tak, že $x \in W$ a $W \subset U \cap V$.*

DŮKAZ. 1. Předpokládejme, že τ_0 je báze topologie topologického prostoru X. Pak evidentně $\emptyset \in \tau_0$ a X je sjednocením množin z τ_0. Pro libovolné $U,\ V \in \tau_0$ je množina $U \cap V$ otevřená; jelikož τ_0 je báze, $U \cap V$ je sjednocením jistých množin z τ_0 a tedy τ_0 má všechny požadované vlastnosti.

2. Uvažujme systém τ_0 s vlastnostmi, uvedenými v teorému. Označme τ systém množin, vznikajících jako všechna možná sjednocení množin z τ_0. Ukážeme, že τ je topologie. Podle definice báze $\emptyset \in \tau$; dále sjednocení prvků z τ je sjednocením jistých prvků systému τ_0, je tedy prvkem τ. Zbývá dokázat, že z $U,\ V \in \tau$ vyplývá $U \cap V \in \tau$. Buď $x \in U \cap V$ libovolný bod. V τ_0 existují takové množiny $\bar{U},\ \bar{V}$, že $x \in \bar{U} \subset U,\ x \in \bar{V} \subset V$. Dále podle předpokladu v τ_0 existuje množina W tak, že $x \in W \subset \bar{U} \cap \bar{V} \subset U \cap V$. Množina $U \cap V$ je tedy sjednocením množin z τ_0, což jsme chtěli dokázat.

Říkáme, že X je topologický prostor se *spočetnou bází* (nebo *druhého typu spočetnosti*), jestliže existuje spočetná báze jeho topologie.

Buď X topologický prostor. Množina $A \subset X$ se nazývá *uzavřená*, je-li množina $X \setminus A$ (doplněk množiny A v X) otevřená.

Uvažujme libovolnou množinu A v topologickém prostoru X. Nechť $x \in X$ je bod. Bod x splňuje právě jednu z těchto tří podmínek:

(1) Existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset A$.
(2) Existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset X \setminus A$.
(3) Každé okolí U bodu x má neprázdný průnik s množinou A i s jejím doplňkem, t.j. platí $U \cap A \neq \emptyset$, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Množina všech bodů $x \in X$, splňujících první (resp. druhou, resp. třetí) podmínku, se nazývá *vnitřek* (resp. *vnějšek*, resp. *hranice*) množiny A. Vnitřek (resp. vnějšek, resp. hranici) množiny A označujeme $\operatorname{int} A$ (resp. $\operatorname{ext} A$, resp. $\operatorname{fr} A$). Množinu $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{fr} A$ nazýváme *uzávěr* množiny A v topologickém prostoru X.

Následující teorém shrnuje některá pravidla „topologického kalkulu“.

Teorém 1.2. *Buď X topologický prostor. Potom platí následující tvrzení:*

(a) *Buď A podmnožina v X. Pak množiny* $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$ *jsou otevřené a množina* $\operatorname{fr} A$ *je uzavřená.*

(b) *Pro libovolnou množinu A v X platí* $\operatorname{cl} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$*; množina* $\operatorname{cl} A$ *je uzavřená.*

(c) *Pro libovolné dvě množiny A, B v X takové, že $A \subset B$, platí* $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$.

(d) *Pro libovolné dvě množiny A, B v X platí* $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$, $\operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$.

Důkaz. (a) Uvažujme množinu $\operatorname{int} A$. Z definice vyplývá, že tato množina je sjednocení všech otevřených množin, obsažených v A; je to tedy otevřená množina. Analogicky postupujeme v případě množiny $\operatorname{ext} A$. Dále platí $\operatorname{fr} A = X \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{int}(X \setminus A))$; $\operatorname{fr} A$ je tedy doplněk otevřené množiny, t.j. množina uzavřená.

(b) Nechť $x \in \operatorname{cl} A$, $x \notin \operatorname{fr} A$. Pak podle definice $x \in A$. Jelikož $x \notin \operatorname{int}(X \setminus A)$, z disjunktnosti množin $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$, $\operatorname{fr} A$ vyplývá, že $x \in \operatorname{int} A$. Platí tedy $\operatorname{cl} A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$; odsud vyplývá zbývající tvrzení.

(c) Nechť $x \in \operatorname{fr} A$. Pak každé okolí bodu x má neprázdný průnik s A; ovšem $A \subset B$, t.j. má neprázdný průnik s B a tedy $x \in \operatorname{int} B \cup \operatorname{fr} B = \operatorname{cl} B$. Jelikož body A patří množině $\operatorname{cl} B$, máme celkově $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{fr} A \subset \operatorname{cl} B$.

(d) $\operatorname{cl}(A \cup B)$ je uzavřená množina, obsahující A i B. Platí tedy $\operatorname{cl} A,\ \operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$ podle (c), t.j. $\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$. Na druhé straně $\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$ je množina uzavřená, obsahující $A \cup B$, t.j. $\operatorname{cl}(A \cup B) \subset \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$. Platí tedy $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$. Nechť dále $x \in \operatorname{cl}(A \cap B)$; pak $x \in (A \cap B) \cup \operatorname{fr}(A \cap B)$. Platí-li, že $x \in A \cap B$, pak $x \in A,\ B$, t.j. $x \in \operatorname{cl} A,\ \operatorname{cl} B$, t.j. $x \in \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$. Platí-li $x \in \operatorname{fr}(A \cap B)$, pak libovolné okolí bodu x má neprázdný průnik s $A \cap B$, t.j. s A i B; tedy $x \in \operatorname{cl} A,\ \operatorname{cl} B$ a $x \in \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$.

Buď X topologický prostor, τ jeho topologie, $A \subset X$ neprázdná množina. Označme τ_A systém množin tvaru $U \cap A$, kde U probíhá τ. Pak τ_A je topologie na A, nazývaná *indukovaná*; množina A s touto topologií se nazývá *topologický podprostor* topologického prostoru X.

Topologický podprostor oddělitelného topologického prostoru je oddělitelný. Topologický podprostor topologického prostoru se spočetnou bází má spočetnou bázi.

Buď X topologický prostor, $A \subset X$ neprázdná množina. Systém množin $\{B_\iota\}$, kde index ι probíhá nějakou množinu indexů I, se nazývá *pokrytí* množiny A, jestliže platí $A \subset \bigcup B_\iota$ (sjednocení všech množin systému $\{B_\iota\}$). Podsystém pokrytí $\{B_\iota\}$ množiny A, který je pokrytím A, se nazývá *podpokrytí* pokrytí $\{B_\iota\}$. Pokrytí $\{B_\iota\}$ se nazývá *otevřené*, je-li každá z množin B_ι otevřená.

Topologický prostor X se nazývá *kompaktní*, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné podpokrytí. Množina $A \subset X$ se nazývá *kompaktní*, je-li kompaktní jako topologický podprostor topologického prostoru X. A je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí A (v X) lze vybrat konečné podpokrytí.

Uvedeme některé vlastnosti kompaktních množin v rozsahu, potřebném v dalším textu. Všechny použité důkazy vychází přímo z definice kompaktní množiny.

Teorém 1.3. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Sjednocení dvou kompaktních množin je kompaktní množina.*

(b) *Uzavřená podmnožina kompaktního topologického prostoru je kompaktní.*

(c) *Je-li množina A kompaktní a $B \subset A$ otevřená, pak $A \setminus B$ je množina kompaktní.*

(d) *Buďte A, B podmnožiny topologického prostoru X. Předpokládejme, že $A \subset B$ a množina* $\operatorname{cl} B$ *je kompaktní. Pak* $\operatorname{cl} A$ *je kompaktní.*

(e) *Kompaktní množina v oddělitelném topologickém prostoru je uzavřená.*

(f) *Průnik dvou kompaktních množin v oddělitelném topologickém prostoru je kompaktní množina.*

Důkaz. (a) Buďte A, B kompaktní množiny v topologickém prostoru X, buď $\{U_\iota\}$ otevřené pokrytí množiny $A \cup B$. Pak $\{U_\iota\}$ je otevřené pokrytí A i B; lze tedy vybrat konečné podpokrytí $\{V_1, \ldots, V_n\}$ množiny A a konečné podpokrytí $\{W_1, \ldots, W_m\}$ množiny B; vynecháním stejných prvků pokrytí z těchto konečných systémů množin zkonstruujeme konečné podpokrytí pokrytí $\{U_\iota\}$.

(b) Buď X kompaktní topologický prostor, $A \subset X$ množina uzavřená. Buď $\{U_\iota\}$ otevřené pokrytí A. Pak množiny $X \setminus A$, U_ι tvoří otevřené pokrytí X. Vyberme z tohoto otevřeného pokrytí konečné podpokrytí $\{X \setminus A, V_1, \ldots, V_n\}$; pak $\{V_1, \ldots, V_n\}$ je pokrytí A, takže množina A je kompaktní.

(c) Postupujeme stejně jako v případě (b).

(d) Postupujeme jako v případě (b) a využijeme Teorém 1.2, (c).

(e) Buď X oddělitelný topologický prostor, $A \subset X$ kompaktní množina, $x \in X \setminus A$ libovolný bod. Ke každému $y \in A$ existuje podle předpokladu okolí U_y bodu y a okolí V_y bodu x tak, že $U_y \cap V_y = \emptyset$.

Množiny U_y pokrývají A a z kompaktnosti A vyplývá, že existuje konečný systém množin $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$, pokrývající A. Klademe $W = V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}$; W je okolí bodu x. Zřejmě pro každé $s = 1, 2, \ldots, n$ platí $U_{y_s} \cap W \subset U_{y_s} \cap V_{y_s} = \emptyset$, t.j. platí $A \cap W = \emptyset$. W tedy leží v $X \setminus A$ a z libovolnosti bodu x vyplývá, že $X \setminus A$ je množina otevřená.

(f) Buď X oddělitelný topologický prostor, A, $B \subset X$ kompaktní množiny. Podle tvrzení (e) tohoto teorému víme, že A i B jsou množiny uzavřené; tedy $A \cap B$ je také množina uzavřená (v X) a odtud plyne, že $A \cap B$ je uzavřená v kompaktních topologických podprostorech A, B. Podle tvrzení (b) tohoto teorému pak dostáváme, že $A \cap B$ je množina kompaktní.

Topologický prostor X se nazývá *lokálně kompaktní*, má-li každý bod $x \in X$ okolí U takové, že $\operatorname{cl} U$ je množina kompaktní.

Teorém 1.4. *V každém lokálně kompaktním topologickém prostoru se spočetnou bází existuje spočetná báze topologie $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, taková, že pro každé i množina $\operatorname{cl} U_i$ je kompaktní.*

Důkaz. Buď X lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází, $\{V_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, jeho spočetná báze. Pro každé s nechť j_s označuje s-tý z indexů $1, 2, \ldots$, pro které $\operatorname{cl} V_j$ je množina kompaktní. Klademe $U_s = V_{j_s}$ a označíme τ_0 systém množin $\{U_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$. Tvrdíme, že τ_0 je báze topologie topologického prostoru X. Prověříme, že jsou splněny předpoklady věty o bázi topologie (Teorém 1.1). Evidentně $\emptyset \in \tau_0$. Dále nechť $x \in X$ je libovolný bod, W jeho okolí takové, že $\operatorname{cl} W$ je množina kompaktní; podle předpokladu takové okolí W existuje. Z vlastností báze topologie vyplývá, že existuje index k tak, že $x \in V_k$ a $V_k \subset W$. Množina $\operatorname{cl} V_k$ tedy musí být kompaktní (Teorém 1.3, (d)) a dostáváme, že $V_k \in \tau_0$. Z libovolnosti bodu x vyplývá, že systém množin τ_0 je pokrytí X. Nakonec vybereme dvě množiny $U_i, U_k \in \tau_0$. Nechť $x \in U_i \cap U_k$ je libolný bod. Podle vlastností báze topologie existuje index j tak, že $x \in V_j \subset U_i \cap U_k$. Pro množinu V_j ovšem platí $V_j \subset U_i$ a z kompaktnosti $\operatorname{cl} U_i$ vyplývá kompaktnost $\operatorname{cl} V_j$ (Teorém 1.3, (d)). Znamená to, že pro jistý index p máme $U_p = V_j \in \tau_0$. Podle Teorému 1.1 je τ_0 báze nějaké topologie na X.

Zbývá ukázat, že topologie generovaná bází τ_0, je totožná s topologií topologického prostoru X. Jelikož každá z množin, vznikajících sjednocením prvků τ_0, je evidentně otevřená v X, stačí ukázat, že otevřená množina v X je sjednocením prvků τ_0. Buď $W \subset X$ otevřená množina. W má vyjádření $W = \bigcup (W \cap U_i)$; stačí tedy ukázat, že každá z množin $W \cap U_i$ je sjednocením množin z τ_0. Množinu $W \cap U_i$ lze vyjádřit jako sjednocení jistých množin báze $\{V_j\}$; každá z těchto množin báze V leží ovšem v U_i a tedy uzávěr $\operatorname{cl} V$ je množina kompaktní (opět podle Teorému 1.3, (d)). Z toho, že $V \in \{V_j\}$ tedy vyplývá, že $V \in \tau_0$ a $W \cap U_i$ je sjednocením množin z τ_0. Tím je důkaz ukončen.

Systém množin $\{U_\iota\}$, $\iota \in I$, v topologickém prostoru X se nazývá *lokálně konečný*, má-li každý bod $x \in X$ okolí U, pro které $U \cap U_\iota \neq \emptyset$ jen pro konečnou množinu indexů ι. Pokrytí $\{U_\iota\}$, $\iota \in I$, topologického prostoru X se nazývá *zjemnění* pokrytí $\{V_\kappa\}$, $\kappa \in K$, existuje-li ke každému indexu $\iota \in I$ index $\kappa \in K$ tak, že $U_\iota \subset V_\kappa$. Topologický prostor X se nazývá *parakompaktní*, je-li oddělitelný a libovolné jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné zjemnění.

Teorém 1.5. *Oddělitelný lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází je parakompaktní.*

Důkaz. Buď $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, taková báze oddělitelného lokálně kompaktního topologického prostoru X se spočetnou bází, že pro každé i množina $\operatorname{cl} U_i$ je kompaktní (Teorém 1.4). Klademe $A_1 = \operatorname{cl} U_1$. Nechť j_2 je nejmenší z indexů k, pro které $A_1 \subset U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_k$. Klademe $V_2 = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{j_2}$, $A_2 = \operatorname{cl} V_2$. Dále postupujeme analogicky. Předpokládejme, že je již pro jisté s definována množina A_s. Označme j_{s+1} nejmenší z indexů k, pro které $A_s \subset U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_k$. Klademe $V_{s+1} = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{j_{s+1}}$, $A_{s+1} = \operatorname{cl} V_{s+1}$. Tím je definována posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots$, která má tyto vlastnosti:

(1) Každá z množin A_s je kompaktní. Skutečně, A_s je sjednocením konečného počtu kompaktních množin.
(2) Pro každé s platí $A_s \subset \operatorname{int} A_{s+1}$. Skutečně, $A_s = \operatorname{cl} U_1 \cup \operatorname{cl} U_2 \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{j_s} \subset U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{j_{s+1}} = V_{s+1} \subset \operatorname{cl} V_{s+1} = A_{s+1}$, přičemž V_{s+1} je otevřená množina obsažená v A_{s+1} a obsahující uzavřenou množinu A_s, tedy také největší otevřená množina obsažená v A_{s+1} obsahuje A_s, t.j. $A_s \subset \operatorname{int} A_{s+1}$.
(3) Systém množin $\{A_1, A_2, \ldots\}$ je pokrytí X. Vyplývá to z toho, že $\{U_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$, je pokrytí X.

Uvažujme množiny A_1, $A_2 \setminus \operatorname{int} A_1$, $A_3 \setminus \operatorname{int} A_2, \ldots$. Z vlastností (2), (3) vyplývá, že tyto množiny pokrývají X a podle Teorému 1.3, (c), je každá z nich kompaktní. Položme $B_0 = \operatorname{int} A_2$, $B_1 = \operatorname{int} A_3$, $B_i = (\operatorname{int} A_{i+2}) \setminus A_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots$. Každá z množin B_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ je otevřená (Teorém 1.3, (e))[1]. Nechť $\{W_\iota\}$, $\iota \in I$, je libovolné otevřené pokrytí topologického prostoru X. Pro každé $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\iota \in I$ uvažujme otevřené množiny $B_s \cap W_\iota$. Tyto množiny pokrývají množinu A_1 (pro $s = 0$), množinu $A_{s+1} \setminus \operatorname{int} A_s$ (pro $s > 0$ celé)[2]. Vyberme z nich konečný systém množin $\{V_1^s, \ldots, V_{j_s}^s\}$, pokrývající množinu $A_{s+1} \setminus \operatorname{int} A_s$. Necháme-li s probíhat množinu všech celých nezáporných čísel, dostaneme pokrytí prostoru X.

Pokrytí $\{V_1^s, \ldots, V_{j_s}^s\}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, je evidentně zjemnění pokrytí $\{W_\iota\}$. Ukážeme, že je lokálně konečné. Množiny $\operatorname{int} A_j$ pokrývají X. K libovolnému bodu $x \in X$ tedy existuje index $k \geq 0$ tak, že $x \in \operatorname{int} A_{k+1}$. Přitom $(\operatorname{int} A_{k+1}) \cap V_p^s = \emptyset$ pro každé $s > k+1$, $p = 1, 2, \ldots, j_s$; množiny $B_s \cap W_\iota$, ze kterých jsou vybrány množiny V_p^s, totiž neobsahují body množiny A_{k+1} (pro $s = k+2$), body množiny $A_{k+2} \supset A_{k+1}$ (pro $s = k+3$), atd. Pokrytí $\{V_1^s, \ldots, V_{j_s}^s\}$ je tedy lokálně konečné. Tím je důkaz hotov.

Teorém 1.6. (Lindelöf) *Otevřené pokrytí topologického prostoru se spočetnou bází obsahuje spočetné podpokrytí.*

Důkaz. Buď X topologický prostor se spočetnou bází, τ_0 jeho spočetná báze, $\{U_\iota\}$, $\iota \in I$, libovolné otevřené pokrytí X. Každá z množin U_ι je sjednocením množin z τ_0. Existuje tedy podsystém $\tau_0{}'$ systému τ_0 takový, že každá z množin $\tau_0{}'$ leží v některé z množin U_ι a $\tau_0{}'$ je pokrytí X. Pro každé $W \in \tau_0{}'$ vyberme index κ tak, aby $W \subset U_\kappa$. Jelikož $\tau_0{}'$ je pokrytí X, množiny U_κ také pokrývají X; tyto množiny tvoří spočetné podpokrytí pokrytí $\{U_\iota\}$.

Topologický prostor, který není sjednocením dvou disjunktních otevřených množin, se nazývá *souvislý.*

Je-li A podmnožina souvislého topologického prostoru X, pak A je otevřená i uzavřená tehdy a jen tehdy, když $A = \emptyset$ nebo $A = X$. Skutečně, předpokládáme-li, že A je otevřená i uzavřená a $A \neq \emptyset$, pak z rovnosti $X = A \cup (X \setminus A)$ vyplývá $X \setminus A = \emptyset$, t.j. $A = X$.

Zobrazení $f : X \to Y$ topologického prostoru X do topologického prostoru Y se nazývá *spojité v bodě* $x \in X$, jestliže ke každému okolí V bodu $f(x) \in Y$ existuje okolí U bodu x tak, že $f(U) \subset V$. Zobrazení f se nazývá *spojité*, jestliže je spojité v každém bodě $x \in X$. Bijektivní zobrazení f topologických prostorů takové, že f i f^{-1} jsou spojitá zobrazení, se nazývá *homeomorfismus.* Existuje-li homeomorfismus $f : X \to Y$, říkáme, že topologické prostory X, Y jsou *homeomorfní.*

Shrneme některé elementární vlastnosti spojitých zobrazení.

Teorém 1.7. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y je spojité tehdy a jen tehdy, když pro každou otevřenou množinu $U \subset Y$ množina $f^{-1}(U) \subset X$ je otevřená.*

(b) *Kompozice dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení.*

(c) *Obraz kompaktní množiny při spojitém zobrazení je kompaktní množina.*

(d) *Je-li $f : X \to Y$ homeomorfismus topologických prostorů, pak pro každou množinu $A \subset Y$ platí* $\operatorname{int} f^{-1}(A) = f^{-1}(\operatorname{int} A)$.

(e) *Buďte f, g dvě spojitá zobrazení topologického prostoru X do oddělitelného topologického prostoru Y. Pak množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ je uzavřená.*

Důkaz. (a) Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení, $W \subset Y$ otevřená množina, $x_0 \in f^{-1}(W)$ bod. W je otevřená, bod $f(x_0)$ má tedy okolí $V \subset W$; f je spojité v bodě x_0, existuje tedy okolí U bodu x_0 tak, že $f(U) \subset V$. Platí tedy $U \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$. Množina $f^{-1}(W)$ je tedy otevřená. Obrácené tvrzení je zřejmé.

(b) Tvrzení je přímým důsledkem definice.

(c) Buď $A \subset X$ kompaktní množina, $\{V_\iota\}$, $\iota \in I$, otevřené pokrytí množiny $f(A)$. Podle (a) $\{f^{-1}(V_\iota)\}$, $\iota \in I$, je otevřené pokrytí množiny A a z kompaktnosti A vyplývá, že lze vybrat jeho konečné podpokrytí

[1] Podle Teorému 1.3, (e), je každá z množin A_s uzavřená jakožto kompaktní množina v oddělitelném topologickém prostoru. Dále pro libovolné dvě množiny A, B v topologickém prostoru, kde A je otevřená a B je uzavřená a takové, že $A \subset B$, platí $A \setminus B$ je množina otevřená.

[2] Zde využíváme vlastnost (2) systému $\{A_s\}$, $s \in \mathbf{N}$.

$\{f^{-1}(V_{\iota_1}), f^{-1}(V_{\iota_2}), \ldots, f^{-1}(V_{\iota_k})\}$. Pak množiny $V_{\iota_1}, V_{\iota_2}, \ldots, V_{\iota_k}$ tvoří konečné podpokrytí pokrytí $\{V_\iota\}$, $\iota \in I$, množiny $f(A)$. Množina $f(A)$ je tedy kompaktní.

(d) Buď $x \in \operatorname{int} f^{-1}(A)$ bod. Existuje okolí U_x bodu x tak, že $U_x \subset f^{-1}(A)$; platí tedy $f(x) \in f(U_x) \subset A$. Jelikož množina $f(U_x)$ je otevřená, platí $f(x) \in \operatorname{int} A$, t.j. $x \in f^{-1}(\operatorname{int} A)$.

Obráceně buď $x \in f^{-1}(\operatorname{int} A)$ bod. Platí $f(x) \in \operatorname{int} A$ a existuje okolí $V_{f(x)}$ bodu $f(x)$ tak, že $V_{f(x)} \subset A$. Odtud $x \in f^{-1}(V_{f(x)}) \subset f^{-1}(A)$ a ihned dostáváme $x \in \operatorname{int} f^{-1}(A)$.

(e) Buď $x_0 \in X$ bod, pro který $f(x_0) \neq g(x_0)$. Zvolme okolí U (resp. V) bodu $f(x_0)$ (resp. $g(x_0)$) tak, že $U \cap V = \emptyset$. Pak $f^{-1}(U)$, $g^{-1}(V)$ jsou okolí bodu x_0 a $f(x) \neq g(x)$ pro každé $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. Množina $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ je tedy otevřená a její komplement je množina uzavřená.

Příklady. (1) Buď $n \geq 1$ celé číslo, $\mathbf{R}$ množina reálných čísel, $\mathbf{R}^n$ množina uspořádaných n-tic $x = (x^1, \ldots, x^n)$ reálných čísel. Množina $K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a^i < x^i < b^i\}$, kde a^i, b^i jsou reálná čísla, se nazývá *otevřený kvádr* v $\mathbf{R}^n$. Systém τ_0 všech otevřených kvádrů je bází jisté topologie na $\mathbf{R}^n$; tuto topologii nazýváme *Euklidovou* nebo také *přirozenou.* $\mathbf{R}^n$ s Euklidovou topologií se nazývá *n-rozměrný Euklidův topologický prostor.*

(2) Klademe $\mathbf{R}^n_- = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^1 \leq 0\}$, $\partial \mathbf{R}^n_- = \operatorname{fr} \mathbf{R}^n_-$ a uvažujeme $\mathbf{R}^n_-$ (resp. $\partial \mathbf{R}^n_-$) jako topologický podprostor $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^n_-$). Topologický prostor $\mathbf{R}^n_-$ (resp. $\partial \mathbf{R}^n_-$) budeme nazývat *poloprostor* v $\mathbf{R}^n$ (resp. *okraj poloprostoru* $\mathbf{R}^n_-$).[3]

(3) *n-rozměrnou topologickou varietou* nazýváme oddělitelný topologický prostor X se spočetnou bází takový, že ke každému bodu $x \in X$ existuje jeho okolí U_x homeomorfní s $\mathbf{R}^n$.

1.2. Hladké variety

Buď $n > 0$ celé číslo, X oddělitelný topologický prostor se spočetnou bází. *n-rozměrným souřadnicovým systémem na* X nazýváme dvojici (U, φ), ve které $U \subset X$ je otevřená množina a φ je homeomorfismus U na otevřenou množinu v $\mathbf{R}^n$. Platí-li, že $x \in U$, říkáme také, že (U, φ) je souřadnicový systém *v bodě* x. Funkce $x^i : U \to \mathbf{R}$, kde $1 \leq i \leq n$, definované vztahem $\varphi(x) = (x^1(x), x^2(x), \ldots, x^n(x))$, se nazývají *souřadnice* na X, asociované s n-rozměrným souřadnicovým systémem (U, φ); píšeme krátce $\varphi = (x^i)$. Čísla $x^1(x), \ldots, x^n(x)$ se přitom nazývají *souřadnice bodu* x vzhledem k (U, φ). *Hladkým* $\mathbf{R}^n$-*atlasem* na X nazýváme systém $\mathscr{A} = \{(U_\iota, \varphi_\iota)\}$ n-rozměrných souřadnicových systémů, kde ι probíhá nějakou indexovou množinu I, splňující tyto podmínky:

(1) $\{U_\iota\}$ je pokrytí X.
(2) Pro každé $\iota, \kappa \in I$ zobrazení $\varphi_\iota \varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa) \to \varphi_\iota(U_\iota \cap U_\kappa)$ je diferencovatelné třídy C^∞.

Zobrazení $\varphi_\iota \varphi_\kappa^{-1}$ se přitom nazývá *transformace souřadnic* na X asociovaná se souřadnicovými systémy (U_ι, φ_ι), $(U_\kappa, \varphi_\kappa)$. n-rozměrný souřadnicový systém (U, φ) na X se nazývá *kompatibilní* s $\mathbf{R}^n$-atlasem $\mathscr{A}$, jsou-li pro každý souřadnicový systém $(V, \psi) \in \mathscr{A}$ zobrazení $\varphi \psi^{-1}$ a $\psi \varphi^{-1}$ diferencovatelná třídy C^∞, t.j. vzniká-li přidáním (U, φ) k atlasu $\mathscr{A}$ opět hladký $\mathbf{R}^n$-atlas. $\mathbf{R}^n$-atlas se nazývá *maximální*, obsahuje-li všechny s ním kompatibilní n-rozměrné souřadnicové systémy. Maximální hladký $\mathbf{R}^n$-atlas na X se nazývá také *n-rozměrná hladká struktura* na X. Oddělitelný topologický prostor X se spočetnou bází, na kterém je dána n-rozměrná hladká struktura, se nazývá *n-rozměrná hladká varieta*; číslo n se nazývá *dimenze* n-rozměrné hladké variety X a označuje $\dim X$.

Nemůže-li dojít k nedorozumění, číslo n ve výše uvedených definicích vynecháváme a mluvíme prostě o *souřadnicovém systému*, *hladkém atlasu* nebo *atlasu*, *hladké struktuře* a *hladké varietě*, ev. prostě o *varietě.*[4]

K zadání hladké struktury zřejmě stačí zadat nějaký atlas; hladká struktura pak vzniká přidáním k tomuto atlasu všech s ním kompatibilních souřadnicových systémů.

Teorém 1.8. *Na každé hladké varietě existuje spočetný atlas* $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *takový, že pokrytí* $\{U_i\}$ *je lokálně konečné.*

[3] Neprázdné otevřené množiny v $\mathbf{R}^1_-$ jsou libovolná sjednocení množin typu (a, b), $(a, 0]$, kde $a < 0, b < 0$ jsou konečná reálná čísla, příp. $a = -\infty$.

[4] Mluvíme-li o souřadnicovém systému, myslíme dále vždy souřadnicový systém patřící dané hladké struktuře.

DŮKAZ. S libovolným atlasem $\mathscr{A} = \{(U_\iota, \varphi_\iota)\}$, $\iota \in I$, je asociováno otevřené pokrytí $\{U_\iota\}$, $\iota \in I$, topologického prostoru X. Možno předpokládat, že toto pokrytí je lokálně konečné (Teorém 1.5). Z tohoto pokrytí vybereme spočetné podpokrytí $\{V_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$, kde $V_s = U_{\iota_s}$ (Teorém 1.6). Pak souřadnicové systémy (V_s, φ_{ι_s}), $s = 1, 2, \ldots$, tvoří spočetný atlas. Tento atlas zřejmě definuje stejnou hladkou strukturu jako atlas $\mathscr{A}$, a s ním asociované pokrytí $\{V_s\}$ variety X je lokálně konečné.

Následující teorém ukazuje, jak lze na množinách zadávat hladkou strukturu pomocí spočetných systémů jistých bijekcí.

TEORÉM 1.9. *Buď X neprázdná množina a předpokládejme, že je dán systém dvojic (U_i, φ_i), $i = 1, 2, \ldots$, splňující tyto podmínky:*

(1) *Pro každé i U_i je podmnožina X a $\bigcup U_i = X$.*

(2) *Pro každé i φ_i je bijekce U_i na podmnožinu v $\mathbf{R}^n$.*

(3) *Pro každé i, j množina $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a zobrazení $\varphi_i\varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ je diferencovatelné třídy C^∞.*

(4) *K libovolným dvěma různým bodům $x_1, x_2 \in X$ existují indexy i, j a množiny $V_1, V_2 \subset X$ tak, že $x_1 \in V_1 \subset U_i$, $x_2 \in V_2 \subset U_j$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a množiny $\varphi_i(V_1)$, $\varphi_j(V_2) \subset \mathbf{R}^n$ jsou otevřené.*

Pak na X existuje jediná hladká struktura, pro kterou systém $\{(U_i, \varphi_i)\}$ je atlas na X.

DŮKAZ. Ukážeme, že na X existuje jediná struktura oddělitelného topologického prostoru se spočetnou bází, pro kterou $U_i \subset X$ je množina otevřená a $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$ je homeomorfismus pro každé i. Uvažujme množiny tvaru $\varphi_i^{-1}(V)$, kde V je množina otevřená v $\mathbf{R}^n$. Mějme dvě množiny $U_1 = \varphi_i^{-1}(V_1)$, $U_2 = \varphi_i^{-1}(V_2)$ a bod $x \in U_1 \cap U_2$. Položme $W = U_1 \cap U_2$. Jelikož $W = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U_1 \cap U_2))$ a $\varphi_i(U_1 \cap U_2)$ je množina otevřená v $\mathbf{R}^n$ (podmínka (3)), tyto množiny splňují předpoklady věty o bázi topologie a tvoří tedy bázi jisté topologie τ na X. V této topologii je každé ze zobrazení φ_i homeomorfismus. Z podmínky (4) a z oddělitelnosti Euklidovy topologie v $\mathbf{R}^n$ vyplývá oddělitelnost topologie τ. Dále Euklidova topologie má spočetnou bázi a systém zobrazení φ_i, $i = 1, 2, \ldots$, je spočetný, takže topologie τ má spočetnou bázi. To dokazuje existenci požadované topologie. Každé dvě topologie, pro které φ_i jsou homeomorfismy, jsou generovány stejnou bází a tedy splývají.

Podmínky (1) a (2) z definice hladkého atlasu jsou evidentně splněny; systém $\{(U_i, \varphi_i)\}$ je tedy hladký atlas, což jsme chtěli ukázat.

Z toho, že na každé hladké varietě existuje spočetný atlas, vyplývá, že každou hladkou strukturu lze zadat způsobem, uvedeným v Teorému 1.9; tento teorém tedy charakterizuje hladké variety beze zbytku.

Buď X n-rozměrná varieta, $Y \subset X$ otevřená množina. Na Y existuje jediná hladká struktura taková, že pro každý souřadnicový systém (U, φ) na X dvojice (V, ψ), kde $V = U \cap Y$, $\psi = \varphi|_V$ (zúžení zobrazení φ na množinu V), je souřadnicový systém na Y; Y jako topologický prostor je přitom podprostor X. S touto hladkou strukturou se Y nazývá *otevřená podvarieta* variety X.

Buď X n-rozměrná varieta, m celé číslo takové, že $1 \leq m < n$. Podmnožina $Y \subset X$ se nazývá *m-rozměrná podvarieta* variety X, jestliže ke každému bodu $x_0 \in Y$ existuje souřadnicový systém (U, φ), $\varphi = (x^i)$, v bodě x_0 na X tak, že $U \cap Y = \{x \in U \mid x^{m+1}(x) = 0, \ldots, x^n(x) = 0\}$; množina $U \cap Y$ má tedy rovnice $x^{m+1} = 0, \ldots, x^n = 0$, které nazýváme *rovnice podvariety* Y vzhledem k souřadnicovému systému (U, φ). Souřadnicový systém (U, φ) s uvedenými vlastnostmi se nazývá *adaptovaný* k podvarietě Y v bodě x_0 nebo není-li třeba specifikovat bod x_0, *adaptovaný* k podvarietě Y. Říkáme, že podvarieta Y je *uzavřená*, je-li uzavřená jako podmnožina topologického prostoru X.

Z definice a Teorému 1.9 vyplývá, že množina Y s indukovanou topologií spolu se systémem dvojic (V, ψ), kde $V = U \cap Y$, $\psi = \varphi|_V$ pro nějaký souřadnicový systém (U, φ) na X, adaptovaný k Y a ψ uvažováno jako zobrazení z V do $\mathbf{R}^m$, je hladká m-rozměrná varieta.

Buďte X a Y dvě variety, $n = \dim X$, $m = \dim Y$, $f : X \to Y$ zobrazení. Buď (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X, (V, ψ), $\psi = (y^\sigma)$, souřadnicový systém na Y a předpokládejme, že $f : U \to V$. Zobrazení $\psi f \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ otevřených množin v Euklidových topologických prostorech se nazývá *souřadnicové vyjádření* zobrazení f vzhledem k souřadnicovým systémům (U, φ), (V, ψ). Označíme-li f^σ, kde $1 \leq \sigma \leq m$, složky zobrazení $\psi f \varphi^{-1}$, t.j. funkce definované vztahem $\psi f \varphi^{-1} = (f^1, \ldots, f^m)$, bude zobrazení $\psi f \varphi^{-1}$ vyjádřeno vztahy

$$y^\sigma = f^\sigma(x^1, \ldots, x^n), \quad 1 \leq \sigma \leq m, \tag{1.2.1}$$

které nazýváme *rovnice zobrazení* f vzhledem k souřadnicovým systémům (U, φ), (V, ψ).

Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *hladké* v bodě $x \in X$, jestliže existuje souřadnicový systém (U, φ) na X a souřadnicový systém (V, ψ) na Y tak, že $x \in U$, $f(U) \subset V$ a souřadnicové vyjádření zobrazení f vzhledem k (U, φ), (V, ψ) je diferencovatelné zobrazení třídy C^∞ v bodě $\varphi(x)$.

Je-li f hladké v bodě x, pak pro každý souřadnicový systém $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ na X a každý souřadnicový systém $(\bar{V}, \bar{\psi})$ na Y takový, že $x \in \bar{U}$, $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$, souřadnicové vyjádření $\bar{\psi} f \bar{\varphi}^{-1}$ je diferencovatelné zobrazení třídy C^∞ v bodě $\bar{\varphi}(x)$. Skutečně, $\bar{\psi} f \bar{\varphi}^{-1} = \bar{\psi}\psi^{-1}\psi f \varphi^{-1}\varphi\bar{\varphi}^{-1}$, takže $\bar{\psi} f \bar{\varphi}^{-1}$ je diferencovatelné jako kompozice diferencovatelných zobrazení Euklidových prostorů.

Řekneme, že zobrazení f je *hladké*, je-li hladké v každém bodě $x \in X$.

Kompozice gf hladkých zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ hladkých variet je evidentně hladké zobrazení.

Zobrazení $f : X \to Y$ hladkých variet se nazývá *difeomorfismus*, je-li bijektivní a obě zobrazení f, f^{-1} jsou hladká.

Příklady. (1) Tzv. *kanonická* struktura n-rozměrné variety na n-rozměrném Euklidově topologickém prostoru $\mathbf{R}^n$ je definována atlasem, tvořeným jediným souřadnicovým systémem $(\mathbf{R}^n, \mathrm{id})$, kde id je identické zobrazení množiny $\mathbf{R}^n$ na sebe.

(2) Buďte $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$ libovolné body. Označme $C^\infty(x, y)$ množinu diferencovatelných zobrazení třídy C^∞ $f : U \to \mathbf{R}^m$, splňujících tyto dvě podmínky: (1) definiční obor U je okolí bodu x, (2) $f(x) = y$. Řekneme, že zobrazení $f, g \in C^\infty(x, y)$ mají *dotyk r-tého řádu*, platí-li pro každé s, $1 \le s \le r$, a každé $\sigma = 1, 2, \dots, m$; $i_1, i_2, \dots, i_s \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\mathrm{D}_{i_1} \dots \mathrm{D}_{i_s} f^\sigma(x) = \mathrm{D}_{i_1} \dots \mathrm{D}_{i_s} g^\sigma(x), \tag{1.2.2}$$

kde f^σ (resp. g^σ) jsou složky zobrazení f (resp. g). Zřejmě relace „zobrazení mají dotyk r-tého řádu“ je relace ekvivalence na množině $C^\infty(x, y)$. Třídu ekvivalence podle této relace nazýváme *r-jet* s *počátkem* x a *koncem* y. r-jet, obsahující zobrazení f, nazýváme také *r-jet zobrazení* f s počátkem x a koncem y a označujeme $\mathrm{J}^r_x f$.

Buďte $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ otevřené množiny a $\mathrm{J}^r(U, V)$ množina všech r-jetů s počátkem v U a koncem ve V. Pro $\mathrm{J}^r_x f \in \mathrm{J}^r(U, V)$ klademe

$$\Phi(\mathrm{J}^r_x f) = (x, f(x), \mathrm{D}_{i_1} f^\sigma(x), \dots, \mathrm{D}_{i_1} \dots \mathrm{D}_{i_r} f^\sigma(x)), \tag{1.2.3}$$

kde $x = (x^1, \dots, x^n)$, $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ a pro každé s a σ s-tice indexů $i_1, \dots, i_s$ probíhá všechny posloupnosti, splňující podmínku $1 \le i_1 \le \dots \le i_s \le n$. Tímto vztahem je definováno zobrazení

$$\Phi : \mathrm{J}^r(U, V) \longrightarrow U \times V \times \mathbf{R}^{m \cdot n} \times \mathbf{R}^{m \cdot \binom{n+1}{2}} \times \dots \times \mathbf{R}^{m \cdot \binom{n+r-1}{r}}. \tag{1.2.4}$$

Snadno lze ukázat, že toto zobrazení je bijekce. Φ je evidentně injektivní, stačí tedy ukázat, že je surjektivní. Zvolíme-li bod $w = (x^i, y^\sigma, y^\sigma_{i_1}, \dots, y^\sigma_{i_1 \dots i_r})$ a uvažujeme-li $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f = (f^\sigma)$, kde

$$f^\sigma(z^1, \dots, z^n) = y^\sigma + y^\sigma_{i_1}(z^{i_1} - x^{i_1}) + \frac{1}{2!} y^\sigma_{i_1 i_2}(z^{i_1} - x^{i_1})(z^{i_2} - x^{i_2}) + \dots + \frac{1}{r!} y^\sigma_{i_1 \dots i_r}(z^{i_1} - x^{i_1}) \dots (z^{i_r} - x^{i_r}), \tag{1.2.5}$$

(přitom ve vztahu (1.2.5) se sčítá přes všechny posloupnosti indexů $i_1, \dots, i_s$, s tím, že pro každé s, $1 \le s \le r$, a libovolnou permutaci κ množiny $\{i_1, \dots, i_s\}$, kde $i_1 \le \dots \le i_s$, klademe $y^\sigma_{\kappa(i_1) \dots \kappa(i_s)} = y^\sigma_{i_1 \dots i_s}$) ihned vidíme, že $\Phi(\mathrm{J}^r_x f) = w$, takže Φ je surjektivní. $\Phi(\mathrm{J}^r(U, V))$ je tedy otevřená množina v jistém Euklidově topologickém prostoru a na $\mathrm{J}^r(U, V)$ existuje jediná hladká struktura, pro kterou $(\mathrm{J}^r(U, V), \Phi)$ je souřadnicový systém; $\mathrm{J}^r(U, V)$ s touto hladkou strukturou se nazývá *varieta r-jetů* s počátkem v U a koncem ve V. Souřadnicový systém $(\mathrm{J}^r(U, V), \Phi)$ na $\mathrm{J}^r(U, V)$ se nazývá *kanonický*. Pro dimenzi variety r-jetů $\mathrm{J}^r(U, V)$ dostáváme

$$\dim \mathrm{J}^r(U, V) = n + m \left(1 + n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+r-1}{r}\right) = n + m \binom{n+r}{n}. \tag{1.2.6}$$

(3) Buď $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferencovatelná funkce třídy C^∞ taková, že matice $(\mathrm{D}_i f(x))$ má hodnost 1 v každém bodě množiny $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Pak X je $(n-1)$-rozměrná podvarieta $\mathbf{R}^n$.

Ukážeme to. Buď $x_0 \in X$ libovolný bod. Podle předpokladu alespoň jedno z čísel $\mathrm{D}_i f(x_0)$ je různé od nuly. Předpokládejme například, že je to číslo $\mathrm{D}_1 f(x_0)$ a uvažujme zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, definované vztahem $\varphi(x^1, \ldots, x^n) = (f(x^1, \ldots, x^n), x^2, \ldots, x^n)$. Pro jacobián tohoto zobrazení snadno dostaneme $\det \mathrm{D}\varphi(x_0) = \mathrm{D}_1 f(x_0) \neq 0$, kde $\mathrm{D}\varphi(x_0)$ označuje Jacobiho matici zobrazení φ v bodě x_0. Podle věty o inverzním zobrazení tedy existuje okolí U bodu x_0 tak, že $\varphi|_U$ je difeomorfismus. $(U, \varphi|_U)$ je tedy souřadnicový systém na $\mathbf{R}^n$ a funkce f je souřadnicová funkce tohoto souřadnicového systému; jelikož množina $U \cap X$ má rovnici $f = 0$, X je $(n-1)$-rozměrná podvarieta $\mathbf{R}^n$.

(4) Je-li varieta X kompaktní, pak každý atlas na X obsahuje alespoň dva souřadnicové systémy.

(5) $\mathrm{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ je uzavřená jednorozměrná podvarieta $\mathbf{R}^2$. $\mathrm{S}^1 \setminus \{(0,1)\}$ je podvarieta, která není uzavřená. $\mathrm{S}^1 \setminus \{(0,1)\}$ je otevřená podvarieta v S^1.

Přejdeme nyní k vyšetřování jistých systémů hladkých funkcí na varietě (rozkladů jednotky), které sehrávají základní úlohu v důkazech některých existenčních teorémů.

Buď X varieta, $f : X \to \mathbf{R}$ funkce. Označíme $\operatorname{supp} f$ uzávěr (v topologii variety X) množiny $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$; $\operatorname{supp} f$ je uzavřená množina, nazývaná *nosič* funkce f.

Předpokládejme, že je dán systém $\{\chi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, reálných funkcí definovaných na X takový, že systém množin $\{\operatorname{supp} \chi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, tvoří lokálně konečné pokrytí variety X. Pak pro každé $x \in X$ $\chi_j(x) \neq 0$ pouze pro konečně mnoho indexů j. Pro každé $x \in X$ je tedy součet $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(x)$ korektně definován a existuje jediná funkce $\chi : X \to \mathbf{R}$ taková, že $\chi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(x)$. Označujeme

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i. \tag{1.2.7}$$

Hladkým rozkladem jednotkové funkce na X nebo stručně *rozkladem jednotky* na X nazýváme spočetný systém $\{\chi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, hladkých reálných funkcí $\chi_i : X \to \mathbf{R}$ splňujících tyto podmínky:

(1) Systém množin $\{\operatorname{supp} \chi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, je lokálně konečné pokrytí variety X.
(2) Pro každé i a každé $x \in X$ je $\chi_i(x) \geq 0$.
(3) $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_i = \mathbf{1}$ (jednotková funkce na X).

Rozklad jednotky $\{\chi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, na X se nazývá *asociovaný* s otevřeným pokrytím $\{W_\iota\}$, $\iota \in I$, variety X, jestliže ke každému i existuje index $\iota \in I$ tak, že $\operatorname{supp} \chi_i \subset W_\iota$.

Podmínka (1) znamená, že každý bod $x \in X$ má okolí U takové, že pouze konečně mnoho funkcí $\chi_i|_U$ (zúžení funkce χ_i na množinu U) je různých od nulové funkce.

Ukážeme, že k libovolnému otevřenému pokrytí $\{W_\iota\}$ variety X lze najít rozklad jednotky na X, asociovaný s $\{W_\iota\}$. Nejdříve k tomu dokážeme dvě pomocné věty.

Uvažujme množinu $\mathbf{R}^n$ s její přirozenou strukturou n-rozměrného normovaného vektorového prostoru. *Norma* vektoru $x = (x^1, \ldots, x^n)$ je definována vztahem

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}. \tag{1.2.8}$$

Dále označme $\mathrm{B}_r^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < r\}$; B_r^n je otevřená koule v $\mathbf{R}^n$ o poloměru r se středem v počátku.

LEMMA 1. *Buď X n-rozměrná varieta, $\{W_\iota\}$, $\iota \in I$, její otevřené pokrytí. Existuje atlas $\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, na X tak, že jsou splněny tyto podmínky:*

(1) *$\{U_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, je lokálně konečné zjemnění pokrytí $\{W_\iota\}$.*
(2) *Pro každé i platí $\varphi_i(U_i) = \mathrm{B}_3^n$.*
(3) *Množiny $V_i = \varphi_i^{-1}(\mathrm{B}_1^n)$ tvoří otevřené pokrytí X.*

DŮKAZ. Zvolíme spočetnou bázi oddělitelného lokálně kompaktního topologického prostoru X podobně jako v důkazu Teorému 1.5. Podle Teorému 1.4 taková báze existuje. Dále zkonstuujeme posloupnost $A_1, A_2, \ldots$, kompaktních množin a posloupnost kompaktních množin $A_1, A_2 \setminus \operatorname{int} A_1, A_3 \setminus \operatorname{int} A_2, \ldots$. Uvažujme množiny $B_0 = \operatorname{int} A_2, B_1 = \operatorname{int} A_3, B_i = (\operatorname{int} A_{i+2}) \setminus A_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots$. Otevřené množiny $B_i \cap W_\iota$, kde $\iota \in I$, pokrývají množinu $A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i$. Zkonstruujeme nové otevřené pokrytí této množiny. Ke každému bodu $x \in B_i \cap W_\iota$ existuje souřadnicový systém $(W_{x,\iota}, \varphi_{x,\iota})$ tak, že $x \in W_{x,\iota} \subset B_i \cap W_\iota$ a $\varphi_{x,\iota}(W_{x,\iota}) \supset \mathrm{B}_3^n$. Klademe $U_{x,\iota} = \varphi_{x,\iota}^{-1}(\mathrm{B}_3^n)$ a $V_{x,\iota} = \varphi_{x,\iota}^{-1}(\mathrm{B}_1^n)$. Množiny $V_{x,\iota}$ pokrývají $A_{i+1} \setminus \operatorname{int} A_i$.

Vybereme z nich konečné otevřené podpokrytí $\{V_1^i, \dots, V_k^i\}$, kde index k závisí na i. Celkově dostáváme spočetné otevřené pokrytí $\{V_1^i, \dots, V_k^i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, variety X. Toto pokrytí je podle definice zjemnění pokrytí $\{W_\iota\}$. Podobně jako v důkazu Teorému 1.5 se ukáže, že je lokálně konečné. Jelikož každá z množin V_j^i je definiční obor jistého souřadnicového systému (V_j^i, φ), tvrzení je dokázáno.

Lemma 2. *Existuje diferencovatelná funkce třídy C^∞ $\chi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ taková, že $\chi(x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbf{R}^n$ a platí*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Důkaz. Klademe

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Snadno lze ukázat, že funkce f je diferencovatelná třídy C^∞. K tomu stačí vyšetřit její chování v bodě $t = 0$. V tomto bodě funkční hodnota i všechny derivace zleva jsou nulové. Jelikož $\lim f(t) = 0$ pro $t \to 0$ zprava, funkce f je spojitá v bodě 0. Uvažujme derivaci funkce f v libovolném bodě $t > 0$. Pro k-tou derivaci snadno odvodíme výraz

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k} = Q(t) \cdot f(t), \tag{1.2.11}$$

kde Q je konečný součet výrazů typu c/t^m, kde $c \in \mathbf{R}$, $m > 0$. Abychom ukázali, že $\lim(\mathrm{d}^k f/\mathrm{d}t^k) = 0$ pro $t \to 0$ zprava, stačí ukázat, že $\lim(\mathrm{e}^{-1/t^2}/t^m) = 0$ pro $t \to 0$ zprava pro libovolné m. Z Taylorova rozvoje funkce e^s ve tvaru

$$\mathrm{e}^s = 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^k}{k!} + \frac{s^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{e}^{\vartheta s}, \tag{1.2.12}$$

kde ϑ je číslo z intervalu $(0, 1)$, dostaneme pro $2k > m$ a $s = 1/t^2 > 0$

$$0 < \mathrm{e}^{-1/t^2} < k!\, t^{2k}, \qquad \left| \frac{\mathrm{e}^{-1/t^2}}{t^m} \right| < k!\, |t|^{2k-m}. \tag{1.2.13}$$

Z poslední nerovnosti už vyplývá $\lim(\mathrm{e}^{-1/t^2}/t^m) = 0$ pro $t \to 0$ zprava. Funkce f je tedy diferencovatelná třídy C^k v bodě $t = 0$ pro každé k, t.j. patří třídě C^∞.

Dále klademe

$$g(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t - 3/2)}. \tag{1.2.14}$$

Z definice vyplývá, že g je diferencovatelná funkce třídy C^∞, $g(t) = 0$ pro $t \geq 2$ a $g(t) = 1$ pro $t \leq 3/2$. Nakonec klademe pro každé $x \in \mathbf{R}^n$ $\chi(x) = g(|x|)$. Funkce χ je konstantní na množinách $\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 3/2\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \geq 2\}$; je tedy diferencovatelná třídy C^∞ v každém bodě jejich sjednocení. V každém bodě doplňku jejich sjednocení má vyjádření ve tvaru kompozice diferencovatelných zobrazení třídy C^∞ a je tedy také diferencovatelná třídy C^∞. Další požadované vlastnosti funkce χ vyplývají přímo z definice.

Teorém 1.10. *Ke každému otevřenému pokrytí $\{W_\iota\}$, $\iota \in I$, hladké variety X existuje rozklad jednotky $\{\chi_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, asociovaný s $\{W_\iota\}$.*

Důkaz. K otevřenému pokrytí $\{W_\iota\}$ vybereme atlas $\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, $i = 1, 2, \dots$, tak, že jsou splněny podmínky Lemmatu 1[5] Položme pro každé i $\psi_i = \chi\varphi_i$, kde χ je funkce z Lemmatu 2. Funkce ψ_i je podle definice hladká funkce na U_i a platí $\operatorname{supp}\psi_i \subset U_i$ a $\psi_i(x) = \chi\varphi_i(x) = 1$ pro $x \in V_i$.[6] Jelikož pokrytí $\{U_i\}$ je lokálně konečné, je korektně definována funkce $\sum \psi_i$ (1.2.7). Každá z funkcí ψ_j je ovšem nezáporná. Z toho, že množiny V_j pokrývají X, vyplývá, že ke každému bodu $x \in X$ existuje alespoň jeden index

[5] Připomeňme, že důkaz Lemmatu 1 provádíme na základě Teorémů 1.4 a 1.5 a tedy na základě vlastností topologie hladké variety.

[6] Množiny V_i jsou definovány v podmínce (3) Lemmatu 1.

j tak, že $x \in V_j$; pak ovšem $\psi_j(x) = 1$ a tedy v každém bodě x nabývá funkce $\sum \psi_i$ nenulové hodnoty. Klademe pro každé i

$$\chi_i = \frac{1}{\sum \psi_j} \psi_i. \tag{1.2.15}$$

Funkce χ_i tvoří rozklad jednotky, asociovaný s otevřeným pokrytím $\{W_\iota\}$, $\iota \in I$, variety X, což bylo dokázat.

Poznámka. Rozklad jednotky χ_i z důkazu Teorému 1.10 splňuje kromě podmínek (1)–(3) z definice rozkladu jednotky ještě následující podmínku:

(4) Pro každé i $\operatorname{supp} \chi_i$ je množina kompaktní.

1.3. Diferenciální rovnice

Všude v tomto odstavci uvažujeme množinu $\mathbf{R}^n$ s přirozenou strukturou n-rozměrného Banachova prostoru s *normou* vektoru $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, definovanou vztahem $|x| = ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{1/2}$. Dále všude předpokládáme, že je dán otevřený interval $I \subset \mathbf{R}$, otevřená množina $U \subset \mathbf{R}^n$ a spojitě diferencovatelné zobrazení $f : I \times U \to \mathbf{R}^n$.

Buď $\mathrm{J}^1(I, U)$ varieta 1-jetů s počátkem v I a koncem v U (Příklad 2, Odst. 1.2.). Zobrazení f definuje podmnožinu množiny $\mathrm{J}^1(I, U)$ vztahem $\{(t, x, \dot{x}) \in \mathrm{J}^1(I, U) \mid \dot{x} = f(t, x)\}$; tato podmnožina se nazývá *diferenciální rovnice prvního řádu*, asociovaná se zobrazením f. Zapisujeme ji prostě ve tvaru

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.3.1}$$

Označíme-li f^i, $1 \le i \le n$, složky zobrazení f, pak diferenciální rovnici prvního řádu (1.3.1) lze přepsat ve tvaru systému rovnic

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad 1 \le i \le n. \tag{1.3.2}$$

Pro jednoduchost hovoříme o každém z vyjádření (1.3.1),(1.3.2) jako o *diferenciální rovnici.* Diferencovatelné zobrazení $\alpha : J \to U$, kde $J \subset I$ je otevřený interval, se nazývá *řešení* diferenciální rovnice (1.3.1) *na* J, jestliže pro každé $t \in J$ platí

$$\mathrm{D}\alpha(t) = f(t, \alpha(t)). \tag{1.3.3}$$

Z definice přímo vyplývá, že každé řešení α je *spojitě* diferencovatelné.

V tomto odstavci vyšetřujeme problém existence a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice.

Lemma 1. *K libovolnému bodu $(t_0, x_0) \in I \times U$ lze najít otevřený interval $I_0 \subset I$ se středem t_0 a otevřenou kouli $U_0 \subset U$ se středem x_0 tak, že jsou splněny tyto dvě podmínky:*

(1) *Zobrazení f je ohraničené na $I_0 \times U_0$.*

(2) *Existuje číslo $K \ge 0$ tak, že pro všechna $s, t \in I_0$, $x, y \in U_0$ platí*

$$|f(s, x) - f(t, y)| \le K \, |x - y| \,. \tag{1.3.4}$$

Důkaz. Buď $(t_0, x_0) \in I \times U$ libovolný bod, $I_0 \subset I$ otevřený interval se středem t_0 takový, že $\operatorname{cl} I_0 \subset I$, $U_0 \subset U$ otevřená koule se středem x_0 taková, že $\operatorname{cl} U_0 \subset U$. Ze spojitosti f vyplývá její ohraničenost na $(\operatorname{cl} I_0) \times (\operatorname{cl} U_0)$, t.j. také na $I_0 \times U_0$. Dále podle věty o střední hodnotě pro libovolné $x, y \in U_0$ platí

$$|f(s, x) - f(t, y)| \le \sup\{|s - t| \,, |x - y|\} \cdot \sup\{|\mathrm{D}f(t + \vartheta(s - t), y + \vartheta(x - y))| \mid 0 \le \vartheta \le 1\}. \tag{1.3.5}$$

Ze spojitosti derivace $\mathrm{D}f$ zobrazení f vyplývá ohraničenost $\mathrm{D}f$ na $I_0 \times U_0$. Existuje tedy konstanta $K \ge 0$ tak, že platí (1.3.4). Tím je důkaz ukončen.

Podmínka (2) z Lemmatu 1 se nazývá *Lipschitzova podmínka* na $I_0 \times U_0$ s *Lipschitzovou konstantou* K. Zobrazení f tedy splňuje Lipschitzovu podmínku na $I_0 \times U_0$ s Lipschitzovou konstantou K.

Lemma 2. *Buď $x_0 \in U$ bod. K tomu, aby zobrazení $\alpha : J \to U$, kde $J \subset I$ je otevřený interval se středem t_0, bylo řešením diferenciální rovnice (1.3.1) splňujícím podmínku*

$$\alpha(t_0) = x_0, \tag{1.3.6}$$

je nutné a stačí, aby α bylo spojité a aby na J platilo

$$\alpha(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \alpha(s))\,\mathrm{d}s. \tag{1.3.7}$$

Důkaz. Je-li α řešení, splňující (1.3.6), pak α je spojité a integrací (1.3.3) od t_0 do t dostaneme (1.3.7). Obráceně je-li α spojité a platí (1.3.7), pak je splněna podmínka (1.3.6) a derivací (1.3.7) podle t dostaneme (1.3.3).

Lemma 3. *Předpokládejme, že funkce f je ohraničená na $I \times U$ konstantou $L \geq 1$ a že splňuje na $I \times U$ Lipschitzovu podmínku s Lipschitzovou konstantou $K \geq 1$. Buď $(t_0, x_0) \in I \times U$ libovolný bod, $a \in \mathbf{R}$ číslo takové, že $0 < a < 1$ a $\mathrm{cl}\,\mathrm{B}^n_{2a}(x_0) \subset U$. Zvolme $b < a/KL$ tak, aby $[t_0 - b, t_0 + b] \subset I$. Pak ke každému $x \in \mathrm{B}^n_a(x_0)$ existuje právě jedno řešení $\alpha_x : (t_0 - b, t_0 + b) \to U$ diferenciální rovnice (1.3.1) splňující podmínku $\alpha_x(t_0) = x$. Přitom α_x je třídy C^2.*

Důkaz. Označme S množinu spojitých zobrazení $\gamma : [t_0 - b, t_0 + b] \to \mathrm{cl}\,\mathrm{B}^n_{2a}(x_0)$; S je podmnožina Banachova prostoru spojitých zobrazení $\gamma : [t_0 - b, t_0 + b] \to \mathbf{R}^n$ s normou $|\gamma| = \sup\{|\gamma(t)| \mid |t - t_0| \leq b\}$. S vzniká translací uzavřené koule $\{\gamma \mid |\gamma| \leq 2a\}$ o konstantní vektor $\gamma_0 = x_0$; je to tedy množina uzavřená a úplná jako metrický prostor s metrikou $\mathrm{d}(\gamma, \delta) = |\gamma - \delta|$.

Buď $x \in \mathrm{cl}\,\mathrm{B}^n_a(x_0)$ libovolný bod. Pro každé $\alpha \in S$ klademe

$$(F\alpha)(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, \alpha(s))\,\mathrm{d}s. \tag{1.3.8}$$

Ukážeme, že $F\alpha \in S$. $F\alpha$ je definované na $[t_0 - b, t_0 + b]$ a je evidentně spojité. Dále podle předpokladů

$$|(F\alpha)(t) - x| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \alpha(s))|\,\mathrm{d}s \leq L\,|t - t_0| < a, \tag{1.3.9}$$

t.j. $(F\alpha)(t) \in \mathrm{B}^n_a(x) \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{B}^n_{2a}(x_0)$ a tedy $F\alpha \in S$. Dále ukážeme, že $F : S \to S$ splňuje podmínku $\mathrm{d}(F\alpha, F\beta) \leq a \cdot \mathrm{d}(\alpha, \beta)$ pro každé $\alpha, \beta \in S$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(F\alpha, F\beta) &= \sup\left|\int_{t_0}^{t} (f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s)))\,\mathrm{d}s\right| \leq \sup \int_{t_0}^{t} |f(s, \alpha(s)) - f(s, \beta(s))|\,\mathrm{d}s \leq \\ &\leq \sup K \cdot |\alpha - \beta| \cdot |t - t_0| \leq K \cdot b \cdot \mathrm{d}(\alpha, \beta) < a \cdot \mathrm{d}(\alpha, \beta)/L \leq a \cdot \mathrm{d}(\alpha, \beta), \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

kde supremum je uvažováno pro t splňující podmínku $|t - t_0| \leq b$. Podle věty o pevném bodě v úplných metrických prostorech tedy existuje jediný element $\alpha_x \in S$ tak, že $F\alpha_x = \alpha_x$. Lemma 2 zaručuje, že α_x musí být řešením diferenciální rovnice (1.3.1) splňujícím podmínku $\alpha_x(t_0) = x$. Důkaz je ukončen.

Zobrazení $\alpha : J \to U$ třídy C^1, kde $J \subset I$ je otevřený interval, se nazývá *ε-přibližné řešení* diferenciální rovnice (1.3.1) na J, platí-li $|\mathrm{D}\alpha(t) - f(t, \alpha(t))| \leq \varepsilon$ pro všechna $t \in J$.

Lemma 4. [7] *Buď $J \subset \mathbf{R}$ uzavřený interval, $t_0 \in J$ bod, $g : J \to \mathbf{R}$ spojitá kladná funkce. Předpokládejme, že existují čísla $A, K \geq 0$ tak, že pro každé $t \in J$, $t \geq t_0$,*

$$g(t) \leq A + K \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.3.11}$$

[7] Jde o speciální případ Gronwallova lemmatu.

a pro každé $t \in J$, $t < t_0$,

$$g(t) \leq A + K \int_t^{t_0} g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.3.12}$$

Pak

$$g(t) \leq A \cdot \mathrm{e}^{K \cdot |t - t_0|}. \tag{1.3.13}$$

Důkaz. Předpokládejme, že $t \geq t_0$. Pak podle (1.3.11)

$$g(t) \leq A + KL(t - t_0), \tag{1.3.14}$$

kde L je konstanta, ohraničující funkci g na J. Nyní postupujeme indukcí. Předpokládejme, že pro jisté $n \geq 1$ celé platí

$$g(t) \leq A\left(1 + K(t - t_0) + \frac{1}{2!}K^2(t - t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}K^{n-1}(t - t_0)^{n-1}\right) + L\frac{1}{n!}K^n(t - t_0)^n. \tag{1.3.15}$$

Ze spojitosti a kladnosti g vyplývá

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s \leq A \int_{t_0}^{t} \Bigg(1 + K(s - t_0) + \frac{1}{2!}K^2(s - t_0)^2 + \ldots \\ + \frac{1}{(n-1)!}K^{n-1}(s - t_0)^{n-1}\Bigg)\,\mathrm{d}s + \frac{L}{n!}K^n \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

a po integraci s využitím (1.3.11) dostáváme

$$g(t) \leq A\left(1 + K(t - t_0) + \frac{1}{2!}K^2(t - t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}K^n(t - t_0)^n\right) + \frac{L}{(n+1)!}K^{n+1}(t - t_0)^{n+1}. \tag{1.3.17}$$

Vztah (1.3.15) tedy platí pro každé celé $n \geq 1$. Uvažujme výraz na pravé straně (1.3.15). Jelikož pro libovolné $y \geq 0$ je $\lim(y^n/n!) = 0$ pro $n \to \infty$, pro každé pevné t musí platit

$$g(t) \leq A\mathrm{e}^{K(t - t_0)} = A\mathrm{e}^{K|t - t_0|}, \tag{1.3.18}$$

což jsme chtěli dokázat. Pro $t < t_0$ postupujeme analogicky.

Lemma 5. *Buď α_1 (resp. α_2) ε_1-přibližné (resp. ε_2-přibližné) řešení diferenciální rovnice (1.3.1) na otevřeném intervalu $I_0 \subset I$, obsahujícím bod t_0. Předpokládejme, že f splňuje Lipschitzovu podmínku na $I_0 \times U$ s Lipschitzovou konstantou $K \geq 0$. Pak pro libovolné $t \in I_0$ platí*

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| \leq \left(|\alpha_1(t_0) - \alpha_2(t_0)| + \frac{1}{K}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right)\mathrm{e}^{K|t - t_0|}. \tag{1.3.19}$$

Důkaz. Položme $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ a zaveďme označení $\psi(t) = |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|$, $g(t) = \psi(t) + \varepsilon/K$. Podle předpokladu platí pro každé $t \in I_0$ $|\mathrm{D}\alpha_1(t) - f(t, \alpha_1(t))| \leq \varepsilon_1$, $|\mathrm{D}\alpha_2(t) - f(t, \alpha_2(t))| \leq \varepsilon_2$, odkud dostáváme $|\mathrm{D}\alpha_1(t) - \mathrm{D}\alpha_2(t) - f(t, \alpha_1(t)) + f(t, \alpha_2(t))| \leq \varepsilon$.

Předpokládejme, že $t \geq t_0$. Pak z nerovnosti

$$\begin{aligned} \varepsilon(t - t_0) \geq \int_{t_0}^{t} |\mathrm{D}\alpha_1(s) - \mathrm{D}\alpha_2(s) - f(s, \alpha_1(s)) + f(s, \alpha_2(s))|\,\mathrm{d}s \geq \\ \geq \left|\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0) - \alpha_2(t) + \alpha_2(t_0) - \int_{t_0}^{t} \left(f(s, \alpha_1(s)) - f(s, \alpha_2(s))\right)\mathrm{d}s\right| \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

a z Lipschitzovy podmínky dostáváme

$$\psi(t) \leq \psi(t_0) + \varepsilon(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} |f(s,\alpha_1(s)) - f(s,\alpha_2(s))| \,\mathrm{d}s \leq$$
$$\leq \psi(t_0) + \varepsilon(t-t_0) + K \int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\mathrm{d}s = \psi(t_0) + K \int_{t_0}^{t} \left(\psi(s) + \frac{\varepsilon}{K}\right) \mathrm{d}s, \tag{1.3.21}$$

a tedy

$$g(t) \leq g(t_0) + K \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.3.22}$$

Předpokládáme-li $t < t_0$, analogickým postupem pomocí integrace od t do t_0 dostaneme

$$g(t) \leq g(t_0) + K \int_{t}^{t_0} g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.3.23}$$

Vztahy (1.3.22) a (1.3.23) ukazují, že na každém uzavřeném intervalu $J \subset I_0$ jsou splněny předpoklady Lemmatu 4. Na J tedy platí (1.3.13), odkud

$$\psi(t) \leq \psi(t) + \frac{\varepsilon}{K} \leq \left(\psi(t_0) + \frac{\varepsilon}{K}\right) \mathrm{e}^{K|t-t_0|}, \tag{1.3.24}$$

což je vztah (1.3.19). Z libovolnosti J vyplývá platnost vztahu (1.3.24) na I_0.

Předpokládejme, že interval I obsahuje bod $0 \in \mathbf{R}$. *Lokálním tokem* diferenciální rovnice (1.3.1) *v bodě* $x_0 \in U$ rozumíme zobrazení $\alpha : J \times V \to U$, kde $J \subset I$ je otevřený interval, obsahující bod 0 a $V \subset U$ je okolí bodu x_0 takové, že pro každé $x \in V$ zobrazení $J \ni t \mapsto \alpha_x(t) = \alpha(t,x) \in U$ je řešení rovnice (1.3.1), splňující podmínku $\alpha_x(0) = x$.

Důsledek 1. *Ke každému bodu $x_0 \in U$ lze vybrat otevřený interval $J \subset I$ obsahující 0 a otevřenou množinu $V \subset U$ obsahující x_0 tak, že existuje jediný lokální tok α diferenciální rovnice (1.3.1) v bodě x_0, definovaný na $J \times V$. Množiny J, V lze přitom vybrat tak, aby zobrazení α bylo spojité a splňovalo na $J \times V$ Lipschitzovu podmínku.*

Důkaz. Podle Lemmatu 1 k bodu $(0, x_0) \in I \times U$ vybereme otevřený interval $I_0 \subset I$ se středem 0 a otevřenou kouli $U_0 \subset U$ se středem x_0 tak, že f je na $I_0 \times U_0$ ohraničená konstantou $L \geq 1$ a splňuje tam Lipschitzovu podmínku s Lipschitzovou konstantou $K \geq 1$. Zúžení funkce f na $I_0 \times U_0$ tedy splňuje předpoklady Lemmatu 3. Klademe[8] $J = (-b, b)$, $V = \mathrm{B}^n_a(x_0)$. Označme pro každé $x \in V$ $\alpha_x : J \to U$ jednoznačně určené řešení diferenciální rovnice (1.3.1), splňující podmínku $\alpha_x(0) = x$. Klademe pro každé $t \in J$

$$\alpha(t,x) = \alpha_x(t). \tag{1.3.25}$$

α je jednoznačně určený lokální tok v bodě x_0, definovaný na $J \times V$.

Předpokládejme, že $b \leq 1$ a zvolme $x, y \in V$. Pro libovolné $s, t \in J$ dostáváme z Lemmatu 5 a ze vztahu (1.3.7)

$$|\alpha(t,x) - \alpha(s,y)| \leq |\alpha(t,x) - \alpha(t,y)| + |\alpha(t,y) - \alpha(s,y)| \quad \leq$$
$$\leq |\alpha(0,x) - \alpha(0,y)|\mathrm{e}^{K|t|} + \left| \int_0^t f(\tau,\alpha(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_0^s f(\tau,\alpha(\tau))\mathrm{d}\tau \right| \quad \leq \quad |x-y|\mathrm{e}^K + |t-s|L \tag{1.3.26}$$

Z této nerovnosti vyplývá, že α je spojité a splňuje na $J \times V$ Lipschitzovu podmínku.

Důsledek 2. *Mějme dvě řešení $\alpha_1, \alpha_2 : J \to U$ diferenciální rovnice (1.3.1), definované na otevřeném intervalu $J \subset I$ a předpokládejme, že pro nějaké $t_0 \in J$ platí*

$$\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0). \tag{1.3.27}$$

[8] Číslo b viz. Lemma 3.

Dále předpokládejme, že f splňuje Lipschitzovu podmínku na $J_0 \times U$ pro libovolný otevřený interval $J_0 \subset J$ obsahující t_0 a takový, že $\mathrm{cl}\, J_0 \subset J$. Pak $\alpha_1 = \alpha_2$.

Důkaz. Každý bod $t \in J$ padne do nějakého otevřeného intervalu J_0, obsahujícího t_0 a takového, že $\mathrm{cl}\, J_0 \subset J$. Jelikož na $J_0 \times U$ f splňuje Lipschitzovu podmínku, Lemma 5 (1.3.19), kde bereme $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, spolu se vztahem (1.3.27) dává $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$, což jsme chtěli dokázat.

Předpokládejme, že f splňuje Lipschitzovu podmínku na $I_0 \times U$ pro libovolný otevřený interval $I_0 \subset I$ takový, že $\mathrm{cl}\, I_0 \subset I$. Buďte $\alpha_1 : J_1 \to U$, $\alpha_2 : J_2 \to U$ dvě řešení diferenciální rovnice (1.3.1) taková, že $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Nechť $t_0 \in J_1 \cap J_2$ a předpokládejme, že $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$. Pak podle Důsledku 2. $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$ na $J_1 \cap J_2$. Nechť Ψ je množina všech řešení α, definovaných v bodě t_0 a takových, že $\alpha(t_0) = x_0$, kde $x_0 \in U$ je pevně zvolený bod. Označme J_α definiční obor α a položme $J = \bigcup J_\alpha$, $\alpha \in \Psi$. Dále klademe pro každé $t \in J$ $\beta(t) = \alpha(t)$, platí-li $t \in J_\alpha$. Zobrazení $J \ni t \mapsto \beta(t) \in U$ je korektně definované řešení diferenciální rovnice (1.3.1); říkáme, že je to řešení s *maximálním* definičním oborem, splňující podmínku $\beta(t_0) = x_0$.

Důsledek 3. *Nechť $I = (a, b)$ a předpokládejme, že f splňuje Lipschitzovu podmínku na $I_0 \times U$ pro každý otevřený interval $I_0 \subset I$ takový, že $\mathrm{cl}\, I_0 \subset I$. Nechť $\alpha : (a_0, b_0) \to U$ je řešení diferenciální rovnice (1.3.1) s maximálním definičním oborem. Předpokládejme, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a_0 < b_0 - \varepsilon$ a $\mathrm{cl}\, \alpha((b_0 - \varepsilon, b_0)) \subset U$. Pak $b_0 = b$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $b_0 < b$. Pak $a_0 < b_0 - \varepsilon < b_0 < b$, t.j. $[b_0 - \varepsilon, b_0] \subset I$ a ze spojitosti f vyplývá, že existuje $B > 0$ tak, že $|f(t, \alpha(t))| < B$ pro všechna $t \in (b_0 - \varepsilon, b_0)$. Odtud dostáváme s použitím (1.3.7) pro libovolné $t_0, t_1, t_2 \in (b_0 - \varepsilon, b_0)$

$$|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \alpha(s)) \mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t_2} f(s, \alpha(s)) \mathrm{d}s \right| \leq B |t_1 - t_2|. \tag{1.3.28}$$

Ukážeme, že existuje limita $\lim \alpha(t)$ pro $t \to b_0$. Určíme oscilaci $\Omega(b_0, \alpha)$ zobrazení α v bodě b_0. Podle definice oscilace $\Omega(b_0, \alpha) = \inf \delta(\alpha(V \cap (b_0 - \varepsilon, b_0)))$, kde V probíhá okolí bodu b_0 a $\delta(W)$ označuje průměr množiny W; za V stačí vzít otevřené intervaly. Pro $V = (c, d)$ dostáváme $V \cap (b_0 - \varepsilon, b_0) = (\max(b_0 - \varepsilon, c), b_0)$ a $\Omega(b_0, \alpha) = \inf \delta(\alpha((c, b_0)))$, kde $c < b_0$. Dále podle (1.3.28) $\delta(\alpha((c, b_0))) = \sup |x - y| = \sup |\alpha(s) - \alpha(t)| \leq \sup B |s - t| = B(b_0 - c)$, kde $x, y \in \alpha((c, b_0))$, $s, t \in (c, b_0)$, a tedy $\Omega(b_0, \alpha) = 0$. Z úplnosti metrického prostoru $\mathbf{R}^n$ tedy vyplývá, že existuje limita $\lim \alpha(t) = x_0$ pro $t \to b_0$ a podle předpokladu $\mathrm{cl}\, \alpha((b_0 - \varepsilon, b_0)) \subset U$ je prvkem U.

Uvažujme bod $(b_0, x_0) \in I \times U$. Existuje otevřený interval $J \subset I$ se středem b_0 a otevřená koule $V \subset U$ se středem x_0 tak, že f je ohraničená na $J \times V$ a splňuje tam Lipschitzovu podmínku (Lemma 1). Jsou tedy splněny předpoklady Lemmatu 3 a lze vybrat otevřený interval $J_0 \subset J$ se středem b_0 tak, že existuje právě jedno řešení $\beta : J_0 \to V$ diferenciální rovnice (1.3.1) splňující podmínku $\beta(b_0) = x_0$. Z konstrukce vyplývá, že $(a_0, b_0) \cap J_0 \neq \emptyset$; ukážeme, že na $(a_0, b_0) \cap J_0$ platí $\alpha(t) = \beta(t)$. Zvolme $t_0 \in (a_0, b_0) \cap J_0$. Pak na $(a_0, b_0) \cap J_0$

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \alpha(s)) \, \mathrm{d}s, \\ \beta(t) &= \beta(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \beta(s)) \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.3.29}$$

Pro $t \to b_0$ zleva $\alpha(t) \to x_0$, t.j.

$$x_0 = \alpha(t_0) + \lim_{t \to b_0} \int_{t_0}^{t} f(s, \alpha(s)) \, \mathrm{d}s = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{b_0} f(s, \alpha(s)) \, \mathrm{d}s, \tag{1.3.30}$$

jak vyplývá ze spojitosti integrálu v proměnné t; dále

$$\beta(b_0) = x_0 = \beta(t_0) + \int_{t_0}^{b_0} f(s, \beta(s)) \, \mathrm{d}s = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{b_0} f(s, \alpha(s)) \, \mathrm{d}s, \tag{1.3.31}$$

odkud dostáváme pro každé $t \in (a_0, b_0) \cap J_0$

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= x_0 + \int_{b_0}^{t} f(s, \alpha(s))\,\mathrm{d}s,\\ \beta(t) &= x_0 + \int_{b_0}^{t} f(s, \beta(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Dodefinujeme α na interval $\mathrm{cl}((a_0, b_0) \cap J_0)$ podle spojitosti. Pak využijeme větu o pevném bodě podobně jako v důkazu Lemmatu 3 pro zobrazení (1.3.8); dostaneme $\beta = \alpha$ na každém uzavřeném intervalu tvaru $[c_0, b_0]$, kde $c_0 \in (a_0, b_0) \cap J_0$. β je tedy prodloužení řešení α a definiční obor α nemůže být maximální. Odtud $b_0 = b$, což jsme chtěli dokázat.

Ke studiu závislosti lokálního toku na druhém argumentu potřebujeme vyšetřit určité typy lineárních diferenciálních rovnic, závislých na parametru. Označme $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ vektorový prostor lineárních zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$ s přirozenou strukturou Banachova prostoru; norma v $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ je dána vztahem $|u| = \sup |u(x)|$, kde $|x| \leq 1$. Dále označme $\mathrm{D}_1 f(x, y)$ derivaci zobrazení $x \mapsto f(x, y)$ pro pevné y a id identické zobrazení $\mathbf{R}^n$ na sebe.

LEMMA 6. *Buď $I \subset \mathbf{R}$ otevřený interval obsahující bod 0, $V \subset \mathbf{R}^n$ otevřená množina, $g : I \times V \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ spojité zobrazení. Existuje jediné zobrazení $\chi : I \times V \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ takové, že pro každé $y \in V$*

$$\mathrm{D}_1 \chi(t, y) = g(t, y)\chi(t, y), \tag{1.3.33}$$

$$\chi(0, y) = \mathrm{id}\,. \tag{1.3.34}$$

Zobrazení χ je spojité.

DŮKAZ. Zvolme bod $y \in V$ a uvažujme diferenciální rovnici (1.3.33), přepsanou ve tvaru

$$\mathrm{D}\chi_y(t) = g_y(t)\chi_y(t), \tag{1.3.35}$$

kde $\chi_y(t) = \chi(t, y)$, $g_y(t) = g(t, y)$, s podmínkou

$$\chi_y(0) = \mathrm{id}\,. \tag{1.3.36}$$

Pro každé $u, v \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ platí

$$|g_y(t)(u - v)| \leq |g_y(t)| \cdot |u - v|\,. \tag{1.3.37}$$

Ze spojitosti g vyplývá spojitost g_y; g_y je tedy zobrazení ohraničené na každém kompaktním intervalu v I a funkce $(t, u) \mapsto g_y(t)u$ splňuje Lipschitzovu podmínku na $I_0 \times \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ pro každý otevřený interval $I_0 \subset I$ takový, že $\mathrm{cl}\, I_0 \subset I$. Buď χ_y řešení diferenciální rovnice (1.3.35) s maximálním definičním oborem (a_0, b_0), splňující podmínku (1.3.36). Jelikož evidentně existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\mathrm{cl}\, \chi_y((b_0 - \varepsilon, b_0)) \subset \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, jsou splněny předpoklady Důsledku 3. Lemmatu 5 a musí platit $(a_0, b_0) = I$.

Klademe $\chi(t, y) = \chi_y(t)$; χ splňuje (1.3.33), (1.3.34) a z jednoznačnosti řešení vyplývá, že je jediné. Zbývá dokázat spojitost χ.

Buď $(t_0, y_0) \in I \times V$ bod, buď $J \subset I$ kompaktní interval obsahující bod t_0 a bod 0. Funkce $t \mapsto \chi(t, y_0)$ je spojitá (Lemma 2), je tedy ohraničená na J a existuje $C > 0$ tak, že $|\chi(t, y_0)| \leq C$ pro každé $t \in J$. Dále existuje takové okolí W bodu y_0 ve V, že funkce g je ohraničená na $J \times W$ konstantou $K > 0$.

Pro každé $s \in I$ zobrazení $(t, y) \mapsto g(t, y) - g(t, y_0)$ je spojité na jistém okolí bodu (s, y_0). K libovolnému $\varepsilon > 0$ tedy existuje okolí W_s bodu s a okolí V_s bodu y_0 tak, že pro všechna $t \in W_s$, $y \in V_s$ platí

$$|g(t, y) - g(t, y_0)| < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{1.3.38}$$

Pokryjeme I konečným počtem okolí $W_{i_1}, \ldots, W_{i_r}$ a pro příslušná okolí $V_{i_1}, \ldots, V_{i_r}$ položme $V_0 = \bigcap V_{i_s}$ (průnik všech množin V_{i_s}). K danému ε existuje tedy okolí V_0 bodu y_0 ve W tak, že pro všechna $y \in V_0$

a $t \in J$ platí (1.3.38). Uvažujme řešení χ_{y_0} a χ_y pro každé $y \in V_0$. Platí pro každé $t \in J$, $y \in V_0$ $|\mathrm{D}\chi_{y_0}(t) - g(t,y)\chi_{y_0}(t)| = |\mathrm{D}\chi_{y_0}(t) - g_{y_0}(t)\chi_{y_0}(t) + g_{y_0}(t)\chi_{y_0}(t) - g_y(t)\chi_{y_0}(t)| = |(g(t,y_0) - g(t,y))\chi_{y_0}(t)| \leq$ $\leq |g(t,y) - g(t,y_0)| \cdot |\chi(t,y_0)| < \varepsilon$. Tento vztah ovšem znamená, že χ_{y_0} je ε-přibližné řešení rovnice $\mathrm{D}\alpha(t) = g_y(t)\alpha(t)$. V Lemmatu 5, (1.3.19), klademe $t_0 = 0$ a použijeme podmínky $\chi_y(0) = \chi_{y_0}(0) = \mathrm{id}$; dostaneme $|\chi(t,y) - \chi(t,y_0)| < \varepsilon \mathrm{e}^{K|t|}/K \leq \varepsilon L$, kde $K > 0$ je konstanta ohraničující g na $J \times W$, t.j. Lipschitzova konstanta, podle (1.3.37), a L je číslo omezující funkci $\mathrm{e}^{K|t|}/K$ na J. Nyní pro libovolné $t \in J$, $y \in V$ $|\chi(t,y) - \chi(t_0,y_0)| \leq |\chi(t,y) - \chi(t,y_0)| + |\chi(t,y_0) - \chi(t_0,y_0)| < \varepsilon L + |\chi(t,y_0) - \chi(t_0,y_0)|$. Spojitost χ v bodě (t_0,y_0) nyní vyplývá ze spojitosti funkce $t \mapsto \chi(t,y_0)$ v t_0.

Lemma 6 ukazuje, že pro uvažovaný typ rovnice (1.3.33) ze spojitosti závislosti $g(t,y)$ na parametru y vyplývá spojitá závislost řešení této rovnice na parametru y.

Na místě zobrazení χ z Lemmatu 6 budeme nyní uvažovat zobrazení $I \times V \times \mathbf{R}^n \ni (t,y,z) \mapsto \chi(t,y)z \in \mathbf{R}^n$.

Důsledek. *Pro každé $(t,y,z) \in I \times V \times \mathbf{R}^n$ položme $\beta(t,y,z) = \chi(t,y)z$, $\beta_{y,z}(t) = \beta(t,y,z)$. Zobrazení $\beta_{y,z}$ je řešení diferenciální rovnice*

$$\mathrm{D}\beta_{y,z}(t) = g(t,y)\beta_{y,z}(t), \tag{1.3.39}$$

splňující podmínku $\beta_{y,z}(0) = z$. Zobrazení β je spojité.

Důkaz. Diferenciální rovnice (1.3.39) se přepisuje ve tvaru $\mathrm{D}_1\chi(t,y)z = g(t,y)\chi(t,y)z$; tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 6.

Naším hlavním cílem je studium diferenciálních rovnic (1.3.1), ve kterých funkce $f : I \times U \to \mathbf{R}^n$ je třídy C^p, kde $p \geq 1$.

Teorém 1.11. *Předpokládejme, že zobrazení $f : I \times U \to \mathbf{R}^n$ je třídy C^p, kde $p \geq 1$, a interval I obsahuje bod 0. Pak ke každému bodu $x_0 \in U$ existuje lokální tok $\alpha : J \times V \to U$ v bodě x_0 třídy C^p takový, že zobrazení $\mathrm{D}_2\alpha$ splňuje na $I \times V$ diferenciální rovnici*

$$\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\alpha(t,x) = \mathrm{D}_2 f(t,\alpha(t,x))\mathrm{D}_2\alpha(t,x) \tag{1.3.40}$$

s podmínkou $\mathrm{D}_2\alpha(0,x) = \mathrm{id}$.

Důkaz. Vyberme otevřený interval $J \subset I$ obsahující 0 a okolí V bodu $x_0 \in U$ tak, že existuje lokální tok $\alpha : J \times V \to U$ diferenciální rovnice (1.3.1) v x_0, který je spojitý a splňuje na $J \times V$ Lipschitzovu podmínku (Důsledek 1 Lemmatu 5); budeme dále předpokládat (po případném zúžení J a V), že zobrazení α je ohraničené na $J \times V$. Chceme ukázat, že α je třídy C^p a že $\mathrm{D}_2\alpha$ splňuje (1.3.40) s podmínkou $\mathrm{D}_2\alpha(0,x) = \mathrm{id}$.

Uvažujme nejdříve případ $p = 1$. Klademe v Lemmatu 6 $g(t,x) = \mathrm{D}_2 f(t,\alpha(t,x))$; existuje jediné řešení $\chi : J \times V \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ diferenciální rovnice (1.3.33) splňující podmínku (1.3.34). Ukážeme, že existuje derivace $\mathrm{D}_2\alpha$ a je totožná na $J \times V$ se zobrazením χ; tím bude prověřena podmínka (1.3.40) a dokázána spojitost $\mathrm{D}_2\alpha$.

Zvolme pevně bod $x \in V$ a položme pro každé $h \in \mathbf{R}^n$ takové, že úsečka spojující body $x, x+h$ leží ve V,

$$\zeta(t,h) = \alpha(t,x+h) - \alpha(t,x). \tag{1.3.41}$$

Podle Taylorovy formule $\alpha(t,x+h) = \alpha(t,x) + \mathrm{D}_2\alpha(t,x)h + \Phi_{t,x}(h)$, kde $\lim(\Phi_{t,x}(h)/|h|) = 0$ pro $h \to 0$. Dále $f(t,\alpha(t,x+h)) = f(t,\alpha(t,x)) + \mathrm{D}_2 f(t,\alpha(t,x))\mathrm{D}_2\alpha(t,x)h + \Psi_{t,x}(h)$, kde $\lim(\Psi_{t,x}(h)/|h|) = 0$ pro $h \to 0$. Z těchto vztahů dostáváme $\mathrm{D}_1\zeta(t,h) = \mathrm{D}_1\alpha(t,x+h) - \mathrm{D}_1\alpha(t,x) = f(t,\alpha(t,x+h)) - f(t,\alpha(t,x)) = g(t,x)\zeta(t,h) - g(t,x)\Phi_{t,x}(h) + \Psi_{t,x}(h)$, $|\mathrm{D}_1\zeta(t,h) - g(t,x)\zeta(t,h)| = |\Psi_{t,x}(h) - g(t,x)\Phi_{t,x}(h)|$. Buď $\varepsilon \geq 0$; z vlastností funkcí $\Phi_{t,x}$ a $\Psi_{t,x}$ vyplývá, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé h, pro které $|h| < \delta$, platí $|\Phi_{t,x}(h)| < |h|\varepsilon$, $|\Psi_{t,x}(h)| < |h|\varepsilon$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že tyto vztahy platí pro každé t. Dostáváme

$$|\mathrm{D}_1\zeta(t,h) - g(t,x)\zeta(t,h)| \leq |\Psi_{t,x}(h)| + |g(t,x)|\,|\Phi_{t,x}(h)| < (1 + |g(t,x)|)\,|h|\varepsilon \leq (1+C)|h|\varepsilon, \tag{1.3.42}$$

kde C je konstanta ohraničující funkci g.

Uvažujme diferenciální rovnici

$$\mathrm{D}_1\beta(t,x,z) = g(t,x)\beta(t,x,z) \tag{1.3.43}$$

závislou na parametru (x,z), kde $\beta : J \times V \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, a zobrazení $\chi : J \times V \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ splňující podmínky Lemmatu 6.

$$\mathrm{D}_1\chi(t,x) = g(t,x)\chi(t,x), \quad \chi(0,x) = \mathrm{id}\,. \tag{1.3.44}$$

Pro libovolné h takové, že $|h| < \delta$, zobrazení $t \mapsto \chi(t,x)h$ je řešením rovnice (1.3.43) pro $z = h$ a platí $\chi(0,x)h = h$, t.j.

$$\mathrm{D}_1\chi(t,x)h = g(t,x)\chi(t,x)h. \tag{1.3.45}$$

Zobrazení $t \mapsto \zeta(t,h)$ je podle (1.3.42) $(1+C)|h|\varepsilon$-přibližné řešení rovnice (1.3.45). V Lemmatu 5 klademe $t_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = (1+C)|h|\varepsilon$; dostáváme z (1.3.19) $|\zeta(t,h) - \chi(t,x)h| \le (|\zeta(0,h) - \chi(0,x)h| + (1+C)|h|\varepsilon/K)\mathrm{e}^{K|t|} \le C'|h|\varepsilon$, kde C' je jistá konstanta. Ke každému $\varepsilon' > 0$ tedy existuje $\delta' > 0$ tak, že z $|h| < \delta'$ vyplývá $(1/|h|)|\zeta(t,h) - \chi(t,x)h| < \varepsilon'$: vyberme δ' tak, aby $C'\delta'\varepsilon \le \varepsilon'$. Z (1.3.41) nyní vyplývá, že derivace $\mathrm{D}_2\alpha(t,x)$ existuje a je rovna $\chi(t,x)$.

Jelikož pro každé x zobrazení $t \mapsto \alpha(t,x)$ je spojitě diferencovatelné, α je třídy C^1.

Předpokládejme nyní, že $p \ge 2$ a že lokální tok α je třídy C^{p-1}. Pak z definice a ze vztahu (1.3.3) přímo vyplývá, že $\alpha(t,x)$ je třídy C^{p+1} v t.

Položme pro každé $(t,x,\eta) \in J \times V \times \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$

$$G(t,x,\eta) = (0, g(t,x)\eta), \quad \Lambda(t,x,\eta) = (x, \chi(t,x)\eta), \tag{1.3.46}$$

kde $\chi = \mathrm{D}_2\alpha$ je řešení diferenciální rovnice (1.3.33) splňující podmínku (1.3.34); tyto vztahy definují zobrazení $G : J \times V \times \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n \times \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $\Lambda : J \times V \times \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \to V \times \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ a platí $G(t, \Lambda(t,x,\eta)) = (0, g(t,x)\chi(t,x)\eta)$. Jelikož podle první části důkazu pro $p = 1$ $\mathrm{D}_2\alpha$ existuje a podle předpokladu $p \ge 2$ je spojité, $\mathrm{D}_1\chi$ také existuje a je spojité. Dostáváme z (1.3.44) $\mathrm{D}_1\Lambda(t,x,\eta) = (0, \mathrm{D}_1\chi(t,x)\eta) = (0, g(t,x)\chi(t,x)\eta)$. Pro Λ tedy platí vztahy $\mathrm{D}_1\Lambda(t,x,\eta) = G(t, \Lambda(t,x,\eta))$, $\Lambda(0,x,\eta) = (x,\eta)$.

Ovšem podle předpokladu f je třídy C^p, $p \ge 2$, a lokální tok α je třídy C^{p-1}. g je tedy třídy C^{p-1} a totéž platí o G. Podle první části důkazu teorému pro $p = 1$ musí tedy být (jednoznačně určené) zobrazení Λ třídy C^1. Pro $\eta = \mathrm{id}$ dostáváme, že $\chi = \mathrm{D}_2\alpha$ musí být třídy C^1. Jelikož všechny derivace $\mathrm{D}_1^2\alpha$, $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\alpha$, $\mathrm{D}_2^2\alpha$ existují a jsou spojité, α musí být třídy C^2.

Postup opakujeme s tím, že f nahradíme funkcí G a α lokálním tokem Λ. Podle předpokladu G je třídy C^{p-1} a z výše uvedeného vyplývá, že Λ je třídy C^1; Λ tedy musí být třídy C^2 a α musí být třídy C^3.

Nyní je již zřejmé, že tento postup můžeme dále opakovat. Po p krocích dojdeme k tomu, že α musí být třídy C^p.

Tím je důkaz teorému ukončen.

1.4. Tečný fibrovaný prostor

Buď X n-rozměrná varieta. *Křivkou* v X rozumíme hladké zobrazení otevřeného intervalu v $\mathbf{R}$ do X. Nechť x je pevně zvolený bod X a označme $C^\infty(0,x)$ množinu křivek $\zeta : I \to X$ splňujících tyto dvě podmínky: (1) definiční obor I obsahuje počátek $0 \in \mathbf{R}$, (2) $\zeta(0) = x$. Řekneme, že křivky $\zeta, \chi \in C^\infty(0,x)$ se *dotýkají* v bodě x, existuje-li souřadnicový systém (U,φ), $\varphi = (x^i)$, na X tak, že $x \in U$ a platí

$$\mathrm{D}(\varphi\zeta)(0) = \mathrm{D}(\varphi\chi)(0). \tag{1.4.1}$$

Podmínku (1.4.1) lze vyjádřit ekvivalentně ve tvaru $\mathrm{D}(x^i\zeta)(0) = \mathrm{D}(x^i\chi)(0)$, kde $1 \le i \le n$ a $x^i\zeta$ (resp. $x^i\chi$) jsou složky zobrazení $\varphi\zeta$ (resp. $\varphi\chi$).

Relace „křivky ζ, χ se dotýkají v bodě x“ je relace ekvivalence na množině $C^\infty(0,x)$. Ukážeme to. Tato relace je evidentně symetrická a reflexivní. Zbývá tedy ukázat, že je tranzitivní. Nechť $\zeta, \chi, \eta \in C^\infty(0,x)$ a předpokládejme, že ζ, χ a χ, η se dotýkají v bodě x. Pak pro nějaký souřadnicový systém (U,φ) (resp. (V,ψ)) v bodě x platí $\mathrm{D}(\varphi\zeta)(0) = \mathrm{D}(\varphi\chi)(0)$ (resp. $\mathrm{D}(\psi\chi)(0) = \mathrm{D}(\psi\eta)(0)$). Z věty o derivaci složeného zobrazení dostáváme $\mathrm{D}(\psi\eta)(0) = \mathrm{D}(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x))\mathrm{D}(\varphi\chi)(0) = \mathrm{D}(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x))\mathrm{D}(\varphi\zeta)(0) = \mathrm{D}(\psi\zeta)(0)$, což jsme chtěli dokázat.

Třídu ekvivalence podle této relace ekvivalence nazýváme *tečný vektor* k varietě X v bodě x nebo prostě *vektor* v bodě $x \in X$.

Nechť $\mathsf{T}_x X$ označuje množinu všech tečných vektorů k X v bodě x a položme $\mathsf{T}X = \bigcup \mathsf{T}_x X$ (sjednocení všech množin $\mathsf{T}_x X$). Analogicky položme pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ $\mathsf{T}U = \bigcup \mathsf{T}_x X$ (sjednocení všech $\mathsf{T}_x X$, kde $x \in U$). Označme $\tau : \mathsf{T}X \to X$ surjektivní zobrazení, přiřazující vektoru $\xi \in \mathsf{T}X$ bod $x \in X$ takový, že $\xi \in \mathsf{T}_x X$. Dále každému souřadnicovému systému (U, φ), $\varphi = (x^i)$, na X přiřadíme dvojici $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi)$, kde $\mathsf{T}\varphi : \mathsf{T}U \to \varphi(U) \times \mathbf{R}^n$ je zobrazení, definované vztahem

$$\mathsf{T}\varphi(\xi) = (\varphi(\tau(\xi)), \mathrm{D}(\varphi\zeta)(0)); \tag{1.4.2}$$

v tomto vztahu ζ je libovolný reprezentant vektoru ξ. Pro jednoduchost často složky zobrazení $\varphi\tau$ označujeme prostě x^i. Dále klademe $\dot{x}^i(\xi) = \mathrm{D}(x^i\zeta)(0)$. Při tomto označení zobrazení $\mathsf{T}\varphi$ má složky $x^i, \dot{x}^i$, kde $1 \le i \le n$, a píšeme $\mathsf{T}\varphi = (x^i, \dot{x}^i)$.

Teorém 1.12. *Na množině $\mathsf{T}X$ existuje jediná struktura $2n$-rozměrné hladké variety taková, že pro každý souřadnicový systém (U, φ) na X, $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi)$ je souřadnicový systém na $\mathsf{T}X$. Zobrazení τ je vzhledem k této hladké struktuře hladké.*

Důkaz. Zobrazení $\mathsf{T}\varphi$ je bijektivní: je evidentně injektivní a dále k libovolnému bodu $(x', \xi') \in \varphi(U) \times \mathbf{R}^n$ dostáváme pro křivku $\zeta(t) = \varphi^{-1}(x' + t\xi')$ a vektor ξ, reprezentovaný touto křivkou, $\mathsf{T}\varphi(\xi) = (\varphi(\varphi^{-1}(x')), \mathrm{D}(\varphi\varphi^{-1})(x')\xi') = (x', \xi')$, takže je také surjektivní. Nechť dále (V, ψ), $\psi = (\bar{x}^i)$, je další souřadnicový systém v bodě x. Pro vektor $\mathsf{T}\psi(\xi)$ dostáváme vyjádření $\mathsf{T}\psi(\xi) = (\psi(x), \mathrm{D}(\psi\zeta)(0)) = \mathsf{T}\psi(\mathsf{T}\varphi)^{-1}(\varphi(x), \mathrm{D}(\varphi\zeta)(0))$. Jelikož $\psi(x) = \psi\varphi^{-1}(\varphi(x))$ a $\mathrm{D}(\psi\zeta)(0) = \mathrm{D}(\psi\varphi^{-1})(\varphi\zeta(0))\mathrm{D}(\varphi\zeta)(0)$, vidíme, že $\mathsf{T}\psi(\mathsf{T}\varphi)^{-1} : \mathsf{T}\varphi(\mathsf{T}U \cap \mathsf{T}V) \to \mathsf{T}\psi(\mathsf{T}U \cap \mathsf{T}V)$ je zobrazení, definované rovnicemi $\bar{x}^i = \bar{x}^i\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$, $\bar{\xi}^i = \mathrm{D}_j(\bar{x}^i\varphi^{-1})(\varphi(x))\xi^j$, kde $\bar{\xi}^i = \mathrm{D}(\bar{x}^i\zeta)(0)$, $\xi^j = \mathrm{D}(x^j\zeta)(0)$. Odsud přímo vyplývá, že zobrazení $\mathsf{T}\psi(\mathsf{T}\varphi)^{-1}$ je diferencovatelné třídy C^∞. Podle Teorému 1.9 a Teorému 1.8 na množině $\mathsf{T}X$ tedy existuje jediná hladká struktura s požadovanými vlastnostmi.

Zobrazení $\tau : \mathsf{T}X \to X$ má vzhledem k souřadnicovým systémům (U, φ), $\varphi = (x^i)$, $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi)$, $\mathsf{T}\varphi = (x^i, \dot{x}^i)$, vyjádření

$$\varphi\tau(\mathsf{T}\varphi)^{-1} \tag{1.4.3}$$

je to tedy hladké zobrazení.

Souřadnicový systém $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi)$ na $\mathsf{T}X$ se nazývá *asociovaný* se souřadnicovým systémem (U, φ).

Buď $x \in X$ bod, (U, φ) souřadnicový systém v bodě x. Označme $\mathsf{T}_x\varphi$ zúžení zobrazení $\mathsf{T}\varphi$ na množinu $\mathsf{T}_x X = \tau^{-1}(x) \subset \mathsf{T}U$. Z definice (1.4.2) vyplývá, že $\mathsf{T}_x\varphi$ definuje bijekci $\mathsf{T}_x X$ na $\{\varphi(x)\} \times \mathbf{R}^n$. Přeneseme pomocí této bijekce na množinu $\mathsf{T}_x X$ vektorovou strukturu $\mathbf{R}^n$. Pro každé $a \in \mathbf{R}$, $\xi, \lambda \in \mathsf{T}_x X$ klademe

$$\begin{aligned} a\xi &= (\mathsf{T}_x\varphi)^{-1}(a\,\mathsf{T}_x\varphi(\xi)), \\ \xi + \lambda &= (\mathsf{T}_x\varphi)^{-1}(\mathsf{T}_x\varphi(\xi) + \mathsf{T}_x\varphi(\lambda)). \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Standardním postupem lze prověřit, že tečný vektor na pravé straně je definován nezávisle na použitém souřadnicovém systému (U, φ). Operace násobení skalárem a sčítání tečných vektorů definují na $\mathsf{T}_x X$ strukturu n-rozměrného reálného vektorového prostoru. Každé ze zobrazení $\mathsf{T}_x\psi$, kde (V, ψ) je souřadnicový systém v bodě x, definuje lineární izomorfismus $\mathsf{T}_x X$ na $\mathbf{R}^n$.

Množinu $\mathsf{T}X$ s výše definovanou hladkou strukturou spolu se zobrazením τ a se strukturou n-rozměrného vektorového prostoru na každém $\mathsf{T}_x X$ nazýváme *tečný fibrovaný prostor* variety X. Zobrazení τ nazýváme *projekce* tečného fibrovaného prostoru $\mathsf{T}X$.

Ukážeme, že každému souřadnicovému systému (U, φ) v bodě $x \in X$ lze přiřadit jistou bázi vektorového prostoru $\mathsf{T}_x X$. Předpokládejme pro jednoduchost, že $\varphi(x) = 0 \in \mathbf{R}^n$; tato podmínka může být vždy splněna případnou dodatečnou translací v $\mathbf{R}^n$. Křivka φ^i, definovaná vztahem

$$\varphi^i(t) = \varphi^{-1}(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \tag{1.4.5}$$

(argument t na i-tém místě), se nazývá *i-tá souřadnicová křivka* souřadnicového systému (U, φ). Definiční obor i-té souřadnicové křivky obsahuje okolí bodu $0 \in \mathbf{R}^n$, které není třeba specifikovat. Označme e_i tečný vektor v bodě x, reprezentovaný touto křivkou. Z definice (1.4.2) dostáváme

$$\mathsf{T}_x\varphi(e_i) = ((0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)), \tag{1.4.6}$$

kde první n-tice označuje počátek $\varphi(x) = 0 \in \mathbf{R}^n$ a ve druhé n-tici je číslo 1 na i-tém místě. Z toho, že $\mathsf{T}_x\varphi$ je lineární izomorfismus, tedy vyplývá, že vektory e_i, $1 \le i \le n$, tvoří bázi vektorového prostoru T_xX. Tato báze se nazývá *asociovaná* se souřadnicovým systémem (U, φ).

Buď (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X, $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi)$ s ním asociovaný souřadnicový systém na $\mathsf{T}X$. Zobrazení $\mathsf{T}\varphi$ má složky $x^i\tau, \dot{x}^i$, $1 \le i \le n$; píšeme pro zjednodušení x^i místo $x^i\tau$ a

$$\mathsf{T}\varphi = (x^i, \dot{x}^i). \tag{1.4.7}$$

Pro vektor $\xi \in \mathsf{T}_xX$, kde $x \in U$, n-tice $(x^1(x), \dots, x^n(x))$ představuje souřadnice bodu x a n-tice $(\dot{x}^1(\xi), \dots, \dot{x}^n(\xi))$ *složky* ξ vzhledem k bázi e_i, asociované s (U, φ). Skutečně, pro libovolného reprezentanta ζ vektoru ξ máme $\dot{x}^i(\xi) = \mathrm{D}(x^i\zeta)(0)$; odtud $\mathsf{T}_x\varphi(\xi) = ((0, \dots, 0), (\dot{x}^1(\xi), \dots, \dot{x}^n(\xi))) = \mathsf{T}_x\varphi(\dot{x}^i(\xi)e_i)$ a ξ má jediné vyjádření ve tvaru

$$\xi = \dot{x}^i(\xi)e_i. \tag{1.4.8}$$

Čísla $\dot{x}^i(\xi)$ se nazývají *složky* ξ vzhledem k souřadnicovému systému (U, φ).

Mějme dva souřadnicové systémy (U, φ), $\varphi = (x^i)$, (V, ψ), $\psi = (y^i)$, na varietě X. Je-li transformace souřadnic $\psi\varphi^{-1}$, asociovaná s $(U, \varphi), (V, \psi)$, definovaná rovnicemi $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, pak transformace souřadnic $\mathsf{T}\psi(\mathsf{T}\varphi)^{-1}$, asociovaná s $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi), (\mathsf{T}V, \mathsf{T}\psi)$, má vyjádření $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \dot{y}^i = \mathrm{D}_j(y^i\varphi^{-1})(\varphi)\dot{x}^j$; ve zjednodušené podobě obvykle píšeme

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad \dot{y}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\dot{x}^j. \tag{1.4.9}$$

Buď $W \subset X$ otevřená množina, $C^\infty W$ *okruh hladkých funkcí* na W, $x \in W$ bod. Lineární zobrazení $\delta : C^\infty W \to \mathbf{R}$ se nazývá *derivace* okruhu $C^\infty W$ *v bodě* x, platí-li pro každé $f, g \in C^\infty W$

$$\delta(fg) = f(x)\delta(g) + g(x)\delta(f). \tag{1.4.10}$$

Množina všech derivací okruhu $C^\infty W$ v bodě x je reálný vektorový prostor vzhledem k operaci násobení reálným číslem a operaci sčítání derivací.

Důležitý příklad derivace okruhu funkcí v bodě je dán následující konstrukcí. Buď $\xi \in \mathsf{T}_xX$ tečný vektor, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X takový, že $x \in U$. Reprezentujme ξ ve tvaru (1.4.8), kde $\xi^i = \dot{x}^i(\xi)$ jsou složky zobrazení ξ vzhledem k bázi T_xX, asociované s (U, φ). Přímo lze prověřit, že zobrazení $f \mapsto \partial_\xi f$, definované vztahem

$$\partial_\xi f = \mathrm{D}_i(f\varphi^{-1})(\varphi(x))\xi^i \tag{1.4.11}$$

je derivace okruhu $C^\infty U$ v bodě x. Všimněme si, že pravá strana tohoto výrazu je definovaná korektně, t.j. nezávisí na volbě souřadnicového systému (U, φ). Číslo $\partial_\xi f$ se nazývá *směrová derivace* funkce f podle vektoru ξ.

Ukážeme, že výše uvedeným příkladem jsou vyčerpány všechny derivace okruhu $C^\infty U$ v bodě x.

TEORÉM 1.13. *Buď $x_0 \in X$ bod, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém v bodě x_0, $\delta : C^\infty U \to \mathbf{R}$ derivace v bodě x_0. Pak existuje právě jeden tečný vektor $\xi \in \mathsf{T}_{x_0}X$ tak, že $\delta = \partial_\xi$.*

DŮKAZ. 1. Označme $\mathbf{1} \in C^\infty U$ konstantní funkci rovnou jedné. Jelikož platí $\delta(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = \delta(\mathbf{1}) = 1 \cdot \delta(\mathbf{1}) + 1 \cdot \delta(\mathbf{1}) = 0$, máme $\delta(\mathbf{1}) = 0$ a derivace δ anuluje všechny konstantní funkce. Buď $f \in C^\infty U$ libovolná funkce. Podle Taylorovy věty platí na jistém okolí bodu $\varphi(x_0) = y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n)$

$$f\varphi^{-1}(y^1, \dots, y^n) = f\varphi^{-1}(y_0^1, \dots, y_0^n) + \mathrm{D}_k(f\varphi^{-1})(y_0)(y^k - y_0^k) + \frac{1}{2}f_{ij}(y^1, \dots, y^n)(y^i - y_0^i)(y^j - y_0^j), \tag{1.4.12}$$

kde f_{ij} jsou funkce na tomto okolí. Z linearity δ, ze vztahu (1.4.10) a z identity $\delta(\mathbf{1}) = 0$ dostaneme

$$\delta(f) = \mathrm{D}_i(f\varphi^{-1})(y_0)\xi^i, \tag{1.4.13}$$

kde $\xi^i = \delta(x^i) = \delta(y^i\varphi)$. Číslo na pravé straně nezávisí na (U,φ). Vztahem $\xi = \xi^i e_i$ je tedy korektně definován vektor $\xi \in \mathsf{T}_{x_0}X$ a podle definice derivace v bodě $\delta = \partial_\xi$. To dokazuje existenci vektoru ξ.

2. Platí-li pro vektor $\xi \in \mathsf{T}_x X$ $\partial_\xi f = 0$ pro každé $f \in C^\infty U$, pak evidentně $\xi = 0$; odtud vyplývá, že vektor ξ, splňující podmínku $\partial_\xi = \delta$, je určen jednoznačně.

Důsledek. *Buď (U,φ) souřadnicový systém v bodě $x \in X$. Zobrazení $\xi \mapsto \partial_\xi$ je lineární izomorfismus $\mathsf{T}_x X$ na vektorový prostor derivací okruhu $C^\infty U$ v bodě x.*

Důkaz. Z Teorému 1.13 vyplývá, že stačí prověřit linearitu zobrazení $\xi \mapsto \partial_\xi$, definovaného vztahem (1.4.11).

Vektor e_i báze $\mathsf{T}_x X$, asociované se souřadnicovým systémem (U,φ), přechází při korespondenci $\xi \mapsto \partial_\xi$ v derivaci ∂_{e_i}, definovanou vztahem $\partial_{e_i} f = \mathrm{D}_i(f\varphi^{-1})(\varphi(x))$ (viz. (1.4.11)). Derivaci ∂_{e_i} budeme označovat symbolem $(\partial/\partial x^i)_x$ nebo prostě $\partial/\partial x^i$ a na základě této bijektivní lineární korespondence ji budeme *ztotožňovat* s vektorem e_i, t.j. budeme psát $e_i = (\partial/\partial x^i)_x$. S touto konvencí každý vektor $\xi \in \mathsf{T}_x X$ má jediné vyjádření ve tvaru

$$\xi = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.4.14}$$

kde $\xi^i = \dot{x}^i(\xi)$ jsou složky ξ vzhledem k (U,φ). Vyjádření vektoru ξ ve tvaru lineární kombinace (1.4.14) se nazývá *souřadnicové vyjádření* ξ vzhledem k (U,φ).

Buď X (resp. Y) n-rozměrná (resp. m-rozměrná) varieta, $f : X \to Y$ hladké zobrazení, $x \in X$ bod. Pomocí zobrazení f přiřadíme každému vektoru $\xi \in \mathsf{T}_x X$ jistý vektor $\mathsf{T}_x f(\xi) \in \mathsf{T}_{f(x)}Y$. Tento vektor definujeme jako tečný vektor k Y v bodě $f(x)$, reprezentovaný křivkou $t \mapsto f\zeta(t)$, kde $t \mapsto \zeta(t)$ je libovolný reprezentant vektoru ξ. Musíme ovšem ukázat, že tato definice je korektní, t.j. nezávislá na volbě ζ. Nechť ζ a χ jsou křivky, dotýkající se v bodě $x \in X$. Pak pro libovolný souřadnicový systém (U,φ) (resp. (V,ψ)) v bodě x (resp. $f(x)$) takový, že $f(U) \subset V$, platí podle pravidla pro derivaci složeného zobrazení $\mathrm{D}(\psi f\zeta)(0) = \mathrm{D}(\psi f\varphi^{-1})(\varphi(x))\mathrm{D}(\varphi\zeta)(0) = \mathrm{D}(\psi f\chi)(0)$, což jsme chtěli ukázat.

Najdeme souřadnicové vyjádření vektoru $\mathsf{T}_x f(\xi)$. Nechť (U,φ), $\varphi = (x^i)$, (resp. (V,ψ), $\psi = (y^j)$) je souřadnicový systém v bodě x (resp. $f(x)$), nechť ξ má vyjádření $\xi = \xi^i(\partial/\partial x^i)_x$ vzhledem k (U,φ). Pak pro libovolného reprezentanta ζ vektoru ξ platí $\xi^i = \mathrm{D}(x^i\zeta)(0)$. Vektor $\mathsf{T}_x f(\xi)$ má vzhledem k (V,ψ) vyjádření $\mathsf{T}_x f(\xi) = \lambda^j(\partial/\partial y^j)_{f(x)}$, kde podle definice $\lambda^j = \mathrm{D}(y^j f\zeta)(0)$. Platí tedy $\lambda^j = \mathrm{D}(y^j f\varphi^{-1}\varphi\zeta)(0) = \mathrm{D}_i(y^j f\varphi^{-1})(\varphi(x))\xi^i$ a vektor $\mathsf{T}_x f(\xi)$ má vzhledem k (V,ψ) vyjádření

$$\mathsf{T}_x f(\xi) = \mathrm{D}_i(y^j f\varphi^{-1})(\varphi(x))\xi^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(x)}. \tag{1.4.15}$$

Všimněme si, že v tomto vyjádření $y^j f\varphi^{-1}$ jsou složky souřadnicového vyjádření $\psi f\varphi^{-1}$ zobrazení f.

Zobrazení $\mathsf{T}_x f : \mathsf{T}_x X \to \mathsf{T}_{f(x)}Y$ se nazývá *tečné zobrazení* k zobrazení f v bodě x.

Uvedeme některé základní vlastnosti tečného zobrazení. Označme symbolem id_W identické zobrazení množiny W na sebe; je-li W varieta, pak zobrazení id_W je hladké.

Teorém 1.14. *Platí následující tvrzení:* (a) *Buď $f : X \to Y$ hladké zobrazení variet. Pak pro každé $x \in X$ tečné zobrazení $\mathsf{T}_x f : \mathsf{T}_x X \to \mathsf{T}_{f(x)}Y$ je lineární.*

(b) *Buďte $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ hladká zobrazení variet. Pak pro každé $x \in X$*

$$\mathsf{T}_x(gf) = \mathsf{T}_{f(x)}g\,\mathsf{T}_x f. \tag{1.4.16}$$

Dále

$$\mathsf{T}_x\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\mathsf{T}_x X}\,. \tag{1.4.17}$$

DŮKAZ. (a) Tvrzení vyplývá z (1.4.15).

(b) Vztah (1.4.16) vyplývá z pravidla pro derivaci složeného zobrazení a z (1.4.15). Vztah (1.4.17) vyplývá z (1.4.15).

Buď $f : X \to Y$ hladké zobrazení variet. Pro každé $\xi \in \mathsf{T}X$ klademe

$$\mathsf{T}f(\xi) = \mathsf{T}_x f(\xi), \tag{1.4.18}$$

kde bod $x \in X$ je určen podmínkou $\xi \in \mathsf{T}_x X$. Vztah (1.4.18) definuje zobrazení $\mathsf{T}f : \mathsf{T}X \to \mathsf{T}Y$, jehož zúžení na každý tečný prostor $\mathsf{T}_x X$ splývá s $\mathsf{T}_x f$. Snadno lze určit souřadnicové vyjádření tohoto zobrazení. Je-li zobrazení f vzhledem k souřadnicovým systémům (U, φ), $\varphi = (x^i)$, (V, ψ), $\psi = (y^j)$ vyjádřeno rovnicemi $y^j = y^j f \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$, pak Tf má vzhledem k $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi)$, $(\mathsf{T}V, \mathsf{T}\psi)$ vyjádření

$$\begin{aligned} y^j &= y^j f \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n), \\ \dot{y}^j &= \mathrm{D}_i(y^j f \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n)\dot{x}^i. \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Z tohoto vyjádření vyplývá, že zobrazení Tf je hladké. Tf se nazývá *tečné zobrazení* k zobrazení f.

Z Teorému 1.14 vyplývá, že pro kompozici gf dvou hladkých zobrazení variet platí $T(gf) = TgTf$; dále pro identické zobrazení variety X na sebe platí $\mathsf{T}\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\mathsf{T}X}$.

Pro souřadnicový systém (U, φ) na varietě X zobrazení $\mathsf{T}\varphi$, definované vztahem (1.4.2), splývá s tečným zobrazením k zobrazení φ.

PŘÍKLAD. Pro otevřenou množinu $U \subset \mathbf{R}^n$ platí $\mathsf{T}U = U \times \mathbf{R}^n$. Vyplývá to z existence globálního souřadnicového systému (U, id_U), globálního souřadnicového systému $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\,\mathrm{id}_U)$ a z vlastností zobrazení $\mathsf{T}\,\mathrm{id}_U$.

1.5. Vektorová pole

Buď $I \ni t \mapsto \zeta(t) \in X$ křivka ve varietě X. Pro její definiční obor platí $TI = I \times \mathbf{R}$, je tedy definována křivka $I \ni t \mapsto \mathsf{T}\zeta(t, 1) \in \mathsf{T}X$. Hodnotu této křivky v bodě t budeme označovat symbolem $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$.[9] Podle definice $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t \in \mathsf{T}_{\zeta(t)}X$; říkáme, že $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$ je *tečný vektor* ke křivce ζ v bodě $\zeta(t)$ nebo prostě v bodě t. Křivka $t \mapsto \mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$ se nazývá *tečné vektorové pole* podél křivky ζ.

Buď X n-rozměrná varieta, $\mathsf{T}X$ její tečný fibrovaný prostor, $\tau : \mathsf{T}X \to X$ jeho projekce. *Vektorovým polem* na otevřené množině $W \subset X$ rozumíme každé zobrazení $\xi : W \to \mathsf{T}X$ takové, že

$$\tau\xi = \mathrm{id}_W\,. \tag{1.5.1}$$

Je-li $W = X$, říkáme, že ξ je *globálně definované* vektorové pole. Je-li zobrazení ξ spojité (resp. hladké), říkáme, že vektorové pole ξ je *spojité* (resp. *hladké*).

K tomu, aby zobrazení $\xi : W \to \mathsf{T}X$ bylo vektorové pole, je nutné a stačí, aby pro každé $x \in W$ vektor $\xi(x)$ ležel v tečném prostoru $\mathsf{T}_x X$.

Všude v tomto odstavci budeme pracovat s globálně definovanými vektorovými poli.

Uvažujme vektorové pole ξ na X. Nechť (U, φ), $\varphi = (x^i)$, je souřadnicový systém na X. Pro každé $x \in U$ vektor $\xi(x)$ má jediné vyjádření ve tvaru $\xi(x) = \xi^i(x)(\partial/\partial x^i)_x$ (viz. (1.4.14)), kde $\xi^i(x)$, $1 \le i \le n$, jsou složky vektoru $\xi(x)$. Zúžení vektorového pole ξ na množinu U, označované pro jednoduchost také symbolem ξ, lze proto vyjádřit ve tvaru

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.5.2}$$

kde $\xi^i : U \to \mathbf{R}$ jsou jednoznačně určené funkce. Vektorové pole na pravé straně se nazývá *souřadnicové vyjádření* vektorového pole ξ vzhledem k souřadnicovému systému (U, φ), funkce ξ^i se nazývají *složky* ξ vzhledem k (U, φ). Místo složek ξ^i bude někdy účelné používat funkce $\xi^i \varphi^{-1}$, definované na $\varphi(U)$; tyto funkce budeme pro zjednodušení také označovat ξ^i a nazývat *složky* ξ vzhledem k (U, φ). Souřadnicové vyjádření zobrazení ξ vzhledem k souřadnicovému systému (U, φ), $\varphi = (x^i)$, a s ním asociovanému souřadnicovému systému $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}\varphi)$, $\mathsf{T}\varphi = (x^i, \dot{x}^i)$, je zobrazení $(x^i) \mapsto (x^i, \xi^j(x^i))$; vektorové pole ξ je

[9] Přesněji $\left.\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right|_t = \mathsf{T}\zeta(t, 1)$. Poznamenejme, že $(t, 1)$ je tečný vektor k intervalu I v bodě t, reprezentovaný křivkou $\mathrm{id}_I : I \to I$.

tedy spojité (resp. hladké) tehdy a jen tehdy, když jeho složky vzhledem k nějakému souřadnicovému systému jsou funkce spojité (resp. diferencovatelné třídy C^∞).

Buď ξ hladké vektorové pole na X. *Integrální křivkou* ξ rozumíme křivku $\alpha : I \to X$ takovou, že pro každé $t \in I$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \xi(\alpha(t)). \tag{1.5.3}$$

Říkáme, že integrální křivka α *začíná* v bodě $x_0 \in X$, jestliže interval I obsahuje počátek $0 \in \mathbf{R}$ a platí

$$\alpha(0) = x_0. \tag{1.5.4}$$

Podmínka (1.5.4) se nazývá *počáteční podmínka* pro integrální křivky vektorového pole ξ.

Nechť $\alpha : I \to X$ je libovolná křivka, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X takový, že $\alpha(I) \cap U \neq \emptyset$. Ze spojitosti α vyplývá, že množina $\alpha^{-1}(U) \subset I$ je otevřená; předpokládejme, že tato množina je otevřený interval $J \subset I$. Pak zobrazení $J \ni t \mapsto \varphi\alpha(t) = (x^1\alpha(t), \dots, x^n\alpha(t)) \in \varphi(U)$ je souřadnicové vyjádření křivky α a zúžení α na J je integrální křivka ξ tehdy a jen tehdy, když splňuje systém diferenciálních rovnic

$$\left.\frac{\mathrm{d}x^i\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_t = \xi^i(\alpha(t)), \tag{1.5.5}$$

kde ξ^i jsou složky vektorového pole ξ vzhledem k (U, φ). Skutečně, levá strana (1.5.3) má na U vyjádření $(\mathrm{d}x^i\alpha/\mathrm{d}t)|_t(\partial/\partial x^i)_{\alpha(t)}$ a pravá strana vyjádření $\xi^i(\alpha(t))(\partial/\partial x^i)_{\alpha(t)}$, což dává (1.5.5).

Diferenciální rovnice typu (1.5.5) představují speciální případ diferenciálních rovnic, diskutovaných v odstavci 1.3. Rozšíříme nyní výsledky tohoto odstavce, týkající se existence a jednoznačnosti řešení, na rovnice pro integrální křivky vektorového pole.

Buď ξ hladké vektorové pole na varietě X. *Lokálním tokem* ξ v bodě $x_0 \in X$ rozumíme hladké zobrazení $\alpha : J \times V \to X$, kde J je otevřený interval obsahující 0 a V je okolí bodu x_0, takové, že pro každé $x \in V$ zobrazení $J \ni t \mapsto \alpha_x(t) = \alpha(t, x) \in X$ je integrální křivka ξ, splňující počáteční podmínku $\alpha_x(0) = x$.

Lemma 1. *Buď ξ hladké vektorové pole na X. Ke každému bodu $x_0 \in X$ existuje lokální tok ξ v bodě x_0.*

Důkaz. Zvolme bod $x_0 \in X$ a souřadnicový systém (U, φ), $\varphi = (x^i)$, v bodě x_0. Podle věty o existenci lokálního toku diferenciální rovnice (Teorém 1.11) existuje otevřený interval J obsahující počátek, okolí V' bodu $\varphi(x_0) \in \varphi(U)$ a hladké zobrazení $\beta : J \times V' \to \varphi(U)$ tak, že pro každé $y \in V'$ zobrazení $J \ni t \mapsto \beta_y(t) = \beta(t, y) \in \varphi(U)$ splňuje podmínky

$$\left.\frac{\mathrm{d}\beta^i_y}{\mathrm{d}t}\right|_t = \xi^i\varphi^{-1}(\beta_y(t)), \quad \beta_y(0) = y, \tag{1.5.6}$$

kde ξ^i jsou složky ξ vzhledem k (U, φ) a β^i_y jsou složky zobrazení β_y. Klademe pro každé $t \in J$ a $x \in V = \varphi^{-1}(V')$

$$\alpha(t, x) = \varphi^{-1}(\beta(t, \varphi(x))). \tag{1.5.7}$$

α je evidentně hladké zobrazení a přímým výpočtem s použitím (1.5.6) dostaneme pro každé $x \in V$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_x}{\mathrm{d}t} = \xi(\alpha_x(t)), \quad \alpha_x(0) = x. \tag{1.5.8}$$

α je tedy lokální tok ξ v bodě x_0.

Z jednoznačnosti lokálního toku diferenciální rovnice vyplývá, že lokální tok $\alpha : J \times V \to X$ hladkého vektorového pole je pro pevné J a V určen jednoznačně.

Lemma 2. *Nechť ξ je hladké vektorové pole na X, $I_1, I_2 \subset \mathbf{R}$ otevřené intervaly obsahující počátek a $\alpha_1 : I_1 \to X$, $\alpha_2 : I_2 \to X$ dvě integrální křivky ξ. Předpokládejme, že $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$. Pak pro každé $t \in I_1 \cap I_2$ platí $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$.*

Důkaz. Označme $J = \{t \in I_1 \cap I_2 \mid \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$, $x_0 = \alpha_1(0) = \alpha_2(0)$. J je množina neprázdná. Nechť (U, φ), $\varphi = (x^i)$, je souřadnicový systém na X v bodě x_0. Zúžení křivek $t \mapsto \varphi\alpha_1(t)$, $t \mapsto \varphi\alpha_2(t)$ na jistý otevřený interval $I_0 \subset I_1 \cap I_2$ obsahující počátek splňuje systém (1.5.5) a stejnou počáteční podmínku $\varphi\alpha_1(0) = \varphi(x_0)$, $\varphi\alpha_2(0) = \varphi(x_0)$; křivky $t \mapsto \varphi\alpha_1(t)$, $t \mapsto \varphi\alpha_2(t)$ tedy splývají na jistém okolí bodu 0 (Lemma 3, Odst. 1.3) a J obsahuje okolí počátku. Ukážeme, že J je otevřená množina v $I_1 \cap I_2$. Buď $t_0 \in J$ bod. Existuje okolí počátku 0 tak, že na tomto okolí jsou definovány křivky $t \mapsto \alpha_1'(t) = \alpha_1(t_0+t)$, $t \mapsto \alpha_2'(t) = \alpha_2(t_0+t)$. Jelikož $t_0 \in J$, platí $\alpha_1'(0) = \alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0) = \alpha_2'(0)$ a stejně jako výše se ukáže, že křivky α_1', α_2' splývají na okolí bodu $0 \in \mathbf{R}$; křivky α_1, α_2 tedy splývají na okolí bodu t_0 a J musí být otevřená množina.

Ze spojitosti α_1, α_2 a z toho, že topologický prostor X je oddělitelný ovšem vyplývá, že J je množina uzavřená v souvislém topologickém prostoru $I_1 \cap I_2$ (Odst. 1.1, Teorém 1.7, (e)). Jelikož $J \neq \emptyset$, musí tedy platit $J = I_1 \cap I_2$, což jsme chtěli ukázat.

Z Lemmatu 2 vyplývá, že ke každému bodu $x \in X$ existuje právě jedna integrální křivka α_x vektorového pole ξ s počátkem v bodě x s *maximálním* definičním oborem, t.j. taková integrální křivka ξ, kterou nelze netriviálně prodloužit v integrální křivku ξ. Jejím definičním oborem je sjednocení definičních oborů všech integrálních křivek ξ s počátkem v bodě x; je to otevřený interval označovaný $J(x) = (t^-(x), t^+(x))$ (připouští se $t^-(x) = -\infty$, $t^+(x) = +\infty$).

Klademe $D(\xi) = \{(t,x) \in \mathbf{R} \times X \mid t \in J(x)\}$. *Globálním tokem* hladkého vektorového pole ξ nazýváme zobrazení $\alpha : D(\xi) \to X$ takové, že pro každé $x \in X$ zobrazení $\alpha_x : J(x) \to X$, definované vztahem $\alpha_x(t) = \alpha(t,x)$, je integrální křivka ξ splňující počáteční podmínku $\alpha_x(0) = x$.

Je zřejmé, že globální tok vektorového pole existuje a je určen jednoznačně.

TEORÉM 1.15. *Buď ξ hladké vektorové pole na X, α jeho globální tok.*

(a) *Pro každé $x \in X$ a $t_0 \in J(x)$ platí $J(\alpha(t_0,x)) = J(x) - t_0 = (t^-(x) - t_0, t^+(x) - t_0)$.*

(b) *Pro každé $t \in J(\alpha(t_0,x))$ jsou definovány body $\alpha(t, \alpha(t_0,x)), \alpha(t+t_0,x) \in X$ a platí*

$$\alpha(t, \alpha(t_0,x)) = \alpha(t+t_0,x). \tag{1.5.9}$$

DŮKAZ. (a) Uvažujme integrální křivku $t \mapsto \alpha_x(t)$ s maximálním definičním oborem s počátkem v bodě x. Pak zobrazení $t \mapsto \alpha_x(t+t_0)$ je integrální křivka s počátkem v bodě $\alpha_x(t_0)$ definovaná na otevřeném intervalu $J(x) - t_0 = (a,b)$. Předpokládejme, že existuje integrální křivka $\beta : (a',b') \to X$ tak, že $(a,b) \subset (a',b')$ a $\beta(t') = \alpha_x(t'+t_0)$ pro $t' \in (a,b)$. Pak integrální křivka $t \mapsto \beta(t-t_0)$, definovaná na $(a'+t_0, b'+t_0) \supset J(x)$, je rozšířením integrální křivky $t \mapsto \alpha_x(t)$; musí tedy platit $a' = a, b' = b$ a integrální křivka $t \mapsto \alpha_x(t+t_0)$ má také maximální definiční obor. Odtud $J(\alpha(t_0,x)) = J(x) - t_0$.

(b) Pro $t \in J(\alpha(t_0,x))$ je evidentně definován bod $\alpha(t, \alpha(t_0,x))$. Dále $J(\alpha(t_0,x)) = J(x) - t_0$, t.j. $t + t_0 \in J(x)$ a je definován také bod $\alpha(t+t_0,x)$. Pro křivku $t \mapsto \alpha_x(t+t_0)$ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_x(t+t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha_x(s)\right|_{t+t_0} = \xi(\alpha_x(t+t_0)), \tag{1.5.10}$$

takže tato křivka je integrální křivka ξ s počátkem v bodě $\alpha_x(t_0)$. Jelikož křivka $t \mapsto \alpha(t, \alpha(t_0,x))$ je také integrální křivka ξ s počátkem v bodě $\alpha_x(t_0)$, rovnost (1.5.9) vyplývá z Lemmatu 2.

TEORÉM 1.16. *Pro hladké vektorové pole ξ na varietě X množina $D(\xi) \subset \mathbf{R} \times X$ je otevřená a globální tok $\alpha : D(\xi) \to X$ je hladké zobrazení.*

DŮKAZ. Buď $x \in X$ libovolný bod, $J \subset J(x)$ množina takových bodů t, že (t,x) má v $\mathbf{R} \times X$ okolí, na kterém je globální tok α hladký. Je zřejmé, že stačí dokázat, že $J = J(x)$. Jelikož globální tok α musí na jistém okolí bodu $(0,x)$ splývat s lokálním tokem, bod 0 patří množině J a J je tedy neprázdná. Dále z definice přímo vyplývá, že J je otevřená množina. Dokážeme, že J je uzavřená v $J(x)$; z toho, že interval $J(x)$ je jako topologický prostor souvislý, pak vyplyne $J = J(x)$.

Buď t_0 bod uzávěru $\operatorname{cl} J$. Uvažujme lokální tok $\beta : J' \times V' \to X$ vektorového pole ξ v bodě $\alpha(t_0,x)$; podle definice $0 \in J'$, $\alpha(t_0,x) \in V'$. Integrální křivka $J(x) \ni t \mapsto \alpha_x(t) \in X$ je spojitá v bodě t_0; existuje tedy okolí J_0 bodu t_0 v $J(x)$ tak, že $\alpha_x(J_0) \subset V'$. Dále $t_0 \in \operatorname{cl} J$, takže interval J_0 obsahuje body množiny J. Vyberme $t' \in J_0 \cap J$; bod t' splňuje podmínku $\alpha_x(t') \subset V'$ a případným zmenšením J_0 možno docílit toho, že navíc $t_0 - t' \in J'$. Uvažujme libovolný bod (t, y), pro který $t - t' \in J'$, $\alpha(t', y)$ je definováno a $\alpha(t', y) \in V'$. V bodě (t, y) je definován element $\beta(t - t', \alpha(t', y))$. Ukážeme, že platí vztah

$$\alpha(t, y) = \beta(t - t', \alpha(t', y)). \tag{1.5.11}$$

Množina bodů $\{t \in \mathbf{R} \mid t - t' \in J'\}$ je otevřená a pro libovolné y zobrazení $t \mapsto \alpha(t, y)$, $t \mapsto \beta(t - t', \alpha(t', y))$, definovaná na této množině, jsou integrální křivky ξ. Pro $t = t'$ dostáváme

$$\alpha(t', y) = \beta(0, \alpha(t', y)), \tag{1.5.12}$$

takže v bodě $t = t'$ se tyto integrální křivky protínají. Podobně jako v důkazu Lemmatu 2 odsud vyvodíme, že tyto integrální křivky musí být totožné, t.j. platí (1.5.11). Zobrazení α je tedy definované na jistém okolí $J'' \times V''$ bodu (t', x), přičemž platí $V'' \subset V'$.

Jelikož $t - t' \in J'$, existuje okolí J'_0 bodu t' tak, že $t - t' \in J'$ pro všechna $t \in J'_0$. Pak $J'_0 \times V''$ je okolí bodu (t_0, x) v $\mathbf{R} \times X$ takové, že αmá na tomto okolí vyjádření (1.5.11). α je tedy na $J'_0 \times V''$ hladké jako kompozice hladkých zobrazení a tedy $t_0 \in J$ a množina J je uzavřená v $J(x)$. Tím je důkaz ukončen.

Označme pro každé $t \in \mathbf{R}$ $D_t(\xi) = \{x \in X \mid (t, x) \in D(\xi)\}$ a zaveďme zobrazení $\alpha_t : D_t(\xi) \to X$ vztahem $\alpha_t(x) = \alpha(t, x)$.

Důsledek 1. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Množina $D_t(\xi)$ je otevřená v X a α_t je difeomorfismus $D_t(\xi)$ na otevřenou množinu v X.*

(b) *Platí $\alpha_t(D_t(\xi)) = D_{-t}(\xi)$ a*

$$\alpha_t^{-1} = \alpha_{-t}. \tag{1.5.13}$$

Důkaz. (a) Ke každému $(t, x) \in D(\xi)$ existuje otevřený interval I obsahující t a otevřená množina $V \subset X$ obsahující x tak, že $I \times V \subset D(\xi)$. Platí tedy $\{t\} \times V \subset D(\xi)$, t.j. $V \subset D_t(\xi)$ a $D_t(\xi)$ je otevřená.

Buď $x \in D_t(\xi)$ bod; interval $J(x)$ obsahuje bod 0, takže interval $J(\alpha_t(x)) = J(x) - t$ obsahuje bod $-t$; platí tedy $\alpha_t(x) \in D_{-t}(\xi)$ a α_t zobrazuje $D_t(\xi)$ do $D_{-t}(\xi)$. Je-li $y \in D_{-t}(\xi)$ libovolný bod, pak $\alpha_{-t}(y) \in D_t(\xi)$. $J(\alpha_{-t}(y)) = J(y) + t$ obsahuje bod t, takže je definovaný bod $\alpha_t(\alpha_{-t}(y))$ a podle (1.5.9) je tento bod roven y. α_t tedy zobrazuje $D_t(\xi)$ na otevřenou množinu $D_{-t}(\xi)$.

(b) Pro každé $x \in D_t(\xi)$ $\alpha_{-t}(\alpha_t(\xi))$ je definované a je rovno x; pro každé $y \in D_{-t}(\xi)$ $\alpha_t(\alpha_{-t}(y))$ je definované a je rovno y; zobrazení α_t, α_{-t} jsou tedy navzájem inverzní. Jelikož α_t je kompozice hladkých zobrazení $x \mapsto (t, x)$ a $(t, x) \mapsto \alpha(t, x)$, je hladké a důkaz je ukončen.

Důsledek 2. *Ke každému bodu $x_0 \in X$ existuje jeho okolí W a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že α_t je definované na W pro každé $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dále pro každé $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ takové, že $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a každé $x \in W$*

$$\alpha_t \alpha_s(x) = \alpha_{s+t}(x). \tag{1.5.14}$$

Důkaz. První část tvrzení vyplývá ze spojitosti globálního toku v bodě $(0, x_0)$ (Teorém 1.16). Nechť dále $x \in W$ a nechť $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ jsou čísla, pro která $s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pak $s \in J(x)$, $s + t \in J(x)$ a tedy $t \in J(x) - s = J(\alpha(s, x))$; odtud vyplývá (1.5.14) (Teorém 1.15).

Systém zobrazení $\alpha_t : W \to X$, kde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, se nazývá *lokální jednoparametrická grupa* vektorového pole ξ v bodě x_0. Pro pevné W a ε je lokální jednoparametrická grupa určená jednoznačně.

Buď X varieta. Hladké zobrazení $\alpha : \mathbf{R} \times X \to X$ se nazývá *jednoparametrická grupa difeomorfismů* variety X, jestliže systém zobrazení $\{\alpha_t\}$, $t \in \mathbf{R}$, definovaných vztahem $\alpha_t(x) = \alpha(t, x)$, splňuje tyto podmínky:

(1) $\alpha_0 = \mathrm{id}_X$.
(2) $\alpha_{s+t} = \alpha_s \alpha_t$ pro každé $s, t \in \mathbf{R}$.

Jelikož $\alpha_t\alpha_{-t} = \alpha_{-t}\alpha_t = \alpha_0 = \mathrm{id}_X$, každé zobrazení α_t je difeomorfismus X na sebe.

Klademe pro každé $x \in X$

$$\xi(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t(x)\right|_{t=0}. \tag{1.5.15}$$

ξ je evidentně hladké vektorové pole na X. Platí pro každé t a x

$$\xi(\alpha_t(x)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha_s(\alpha_t(x))\right|_{s=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha_{s+t}(x)\right|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t(x), \tag{1.5.16}$$

takže α je globální tok vektorového pole ξ. ξ se nazývá *generátor* jednoparametrické grupy difeomorfismů α.

Příklady. (1) Globální tok α vektorového pole ξ na varietě X nemusí být jednoparametrickou grupou difeomorfismů α. Položme například $X = \mathbf{R}$, $\xi = x^2$, kde x je kanonická souřadnice na X. Pak diferenciální rovnice $\dot{x} = x^2$ má řešení $x(t)$ definované vztahem $-1/x(t) = t - t_0$, kde t_0 je integrační konstanta. V bodě $t = t_0$ není toto řešení definováno. Globální tok $\alpha(t, y)$ má tvar $\alpha(t, y) = y/(1 - ty)$. Definiční obor $J(y)$ integrální křivky $t \mapsto \alpha(t, y)$ je množina $\mathbf{R} \setminus \{1/y\}$.

(2) Buď $f : X \to Y$ hladké zobrazení variet, ϑ vektorové pole na X. Je zřejmé, že vektory $\mathsf{T}_x f(\vartheta(x))$, kde x probíhá X, nemusí tvořit vektorové pole: platí-li např. $f(x_1) = f(x_2)$ pro nějaké dva různé body $x_1, x_2 \in X$, pak v bodě $f(x_1)$ dostáváme obecně dva různé vektory $\mathsf{T}_{x_1} f(\vartheta(x_1)), \mathsf{T}_{x_2} f(\vartheta(x_2))$. Vektorové pole tedy obecně nelze přenést hladkým zobrazením z X na Y. V souvislosti s tím zavádíme následující pojem. Buď ϑ (resp. ξ) vektorové pole na X (resp. Y). Řekneme, že vektorová pole ϑ, ξ jsou *f-kompatibilní*, platí-li pro každé $x \in X$

$$\mathsf{T}_x f(\vartheta(x)) = \xi(f(x)). \tag{1.5.17}$$

Tuto podmínku zapisujeme také ve tvaru $\mathsf{T}f \circ \vartheta = \xi \circ f$. Označme α^ϑ (resp. α^ξ) globální tok ϑ (resp. ξ). Ukážeme, že ϑ, ξ jsou f-kompatibilní tehdy a jen tehdy, když platí na $D_t(\vartheta)$ pro každé t[10]

$$f \circ \alpha_t^\vartheta = \alpha_t^\xi \circ f. \tag{1.5.18}$$

Určíme tečné vektorové pole podél křivky $t \mapsto f\alpha^\vartheta(t, x)$. Podle definice a (1.5.16) dostáváme pro každé $t \in J(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\alpha^\vartheta(t, x) = \mathsf{T}(f\alpha_x^\vartheta)(t, 1) = \mathsf{T}f(\mathsf{T}\alpha_x^\vartheta(t, 1)) = \mathsf{T}f\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha^\vartheta(t, x)\right) = \mathsf{T}f(\vartheta(\alpha^\vartheta(t, x))), \tag{1.5.19}$$

kde $\mathsf{T}f$ je uvažováno v bodě $\alpha^\vartheta(t, x)$. Podle (1.5.17) platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\alpha^\vartheta(t, x) = \xi(f\alpha^\vartheta(t, x)) \tag{1.5.20}$$

a $t \mapsto f\alpha^\vartheta(t, x)$ je integrální křivka vektorového pole ξ. Z jednoznačnosti integrálních křivek vyplývá $f\alpha^\vartheta(t, x) = \alpha^\xi(t, f(x))$, což dává vztah (1.5.18).

Množina vektorových polí na varietě X má přirozenou algebraickou strukturu. Označme $C^\infty X$ množinu hladkých funkcí na X spolu s operací sčítání a násobení funkcí; $C^\infty X$ je komutativní okruh s jednotkou, nazývaný *okruh hladkých funkcí* na X. Buďte ξ, ϑ hladká vektorová pole na X, $f, g \in C^\infty X$ funkce. Klademe

$$\begin{aligned}(\xi + \vartheta)(x) &= \xi(x) + \vartheta(x),\\ (f\xi)(x) &= f(x)\xi(x),\end{aligned} \tag{1.5.21}$$

kde $x \in X$ je libovolný bod. Evidentně

$$f(\xi + \vartheta) = f\xi + f\vartheta, \quad (f + g)\xi = f\xi + g\xi, \quad f(g\xi) = (fg)\xi. \tag{1.5.22}$$

[10]? $t \in J^\vartheta(x) \cap J^\xi(x)$

Množina hladkých vektorových polí na X má tedy strukturu modulu nad okruhem hladkých funkcí $C^\infty X$. Tento modul se nazývá *modul vektorových polí* na X.

Uvažujeme-li množinu hladkých vektorových polí na X s operací sčítání a násobení reálnými čísly, dostaneme na této množině strukturu reálného vektorového prostoru; v této souvislosti hovoříme o *vektorovém prostoru vektorových polí* na X.

Mějme dvě hladká vektorová pole ξ, ϑ na X. Nechť (U,φ), $\varphi = (x^i)$, je souřadnicový systém na X a nechť

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \vartheta = \vartheta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.5.23}$$

jsou souřadnicová vyjádření těchto vektorových polí vzhledem k (U,φ). Na U je definováno vektorové pole $(\xi^i(\partial\vartheta^j/\partial x^i) - \vartheta^i(\partial\xi^j/\partial x^i))(\partial/\partial x^j)$. Pomocí transformace k libovolnému jinému souřadnicovému systému lze ukázat, že toto vektorové pole je definováno nezávisle na (U,φ). Existuje tedy právě jedno hladké vektorové pole na varietě X, označované $[\xi,\vartheta]$, takové, že

$$[\xi,\vartheta] = \left(\xi^i \frac{\partial\vartheta^j}{\partial x^i} - \vartheta^i \frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.5.24}$$

vzhledem k libovolnému souřadnicovému systému (U,φ), $\varphi = (x^i)$. Vektorové pole $[\xi,\vartheta]$ se nazývá *komutátor* nebo také *Lieova závorka* vektorových polí ξ, ϑ.

Zobrazení $(\xi,\vartheta) \mapsto [\xi,\vartheta]$ je bilineární nad polem reálných čísel. Dále pro libovolná hladká vektorová pole ξ, ϑ, λ na X platí

$$[\xi,\vartheta] = -[\vartheta,\xi], \qquad [\xi,[\vartheta,\lambda]] + [\vartheta,[\lambda,\xi]] + [\lambda,[\xi,\vartheta]] = 0. \tag{1.5.25}$$

Druhý z těchto vztahů se nazývá *Jacobiho identita*.

Množina hladkých vektorových polí na X se strukturou reálného vektorového prostoru a s bilineární operací, definovanou komutátorem, je tedy Lieova algebra; nazýváme ji *Lieova algebra vektorových polí* na X.

Buďte ξ, ϑ dvě vektorová pole na X, α globální tok ξ, $x \in X$ bod. Uvažujme křivku $t \mapsto \chi(t) = \mathsf{T}\alpha_{-t}(\vartheta(\alpha_t(x)))$ v $\mathsf{T}X$ s počátkem v bodě $\vartheta(x)$. Buď (U,φ), $\varphi = (x^i)$, libovolný souřadnicový systém v bodě x. Křivka χ má vzhledem k $(\mathsf{T}U,\mathsf{T}\varphi)$ vyjádření

$$x^i\chi(t) = x^i, \qquad \dot{x}^j\chi(t) = \mathrm{D}_i(x^j\alpha_{-t}\varphi^{-1})(\varphi\alpha_t(x)) \cdot \vartheta^i(\alpha_t(x)), \tag{1.5.26}$$

kde ϑ^i jsou složky ϑ vzhledem k (U,φ). Křivka χ je tedy hladká; všimněme si, že celá leží v pevném vektorovém prostoru T_xX. Tečné vektorové pole $t \mapsto \mathrm{d}\chi/\mathrm{d}t$ je tedy také hladká křivka, ležící v T_xX.Využijeme těchto poznámek ve formulaci a důkazu následujícího tvrzení.

Teorém 1.17. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Buďte ξ, ϑ vektorová pole na X, α globální tok ξ. Pak pro libovolný bod $x \in X$*

$$[\xi,\vartheta](x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{T}\alpha_{-t}(\vartheta(\alpha_t(x)))\bigg|_{t=0}. \tag{1.5.27}$$

(b) *Buď $f : X \to Y$ hladké zobrazení variet, ϑ_1, ξ_1, a ϑ_2, ξ_2 f-kompatibilní vektorová pole. Pak vektorová pole $[\vartheta_1,\vartheta_2]$, $[\xi_1,\xi_2]$ jsou f-kompatibilní.*

Důkaz. (a) Vztah (1.5.27) můžeme dokázat v libovolných souřadnicích (U,φ), $\varphi = (x^i)$, v bodě x. Uvažujme rovnice (1.5.26) křivky χ. Všimněme si, že platí $\mathrm{D}_i(x^j\alpha_{-t}\varphi^{-1}\varphi\alpha_t\varphi^{-1})(\varphi(x)) = \mathrm{D}_i(x^j\varphi^{-1})(\varphi(x)) = \delta^j_i$. Pomocí pravidla pro derivování složeného zobrazení snadno dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{D}_i(x^j\alpha_{-t}\varphi^{-1})(\varphi\alpha_t(x))\bigg|_{t=0} + \mathrm{D}_i(\xi^j\varphi^{-1})(\varphi(x)) = 0, \tag{1.5.28}$$

kde ξ^i jsou složky ξ vzhledem k (U,φ). Odtud

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}^j\chi\bigg|_{t=0} = -\mathrm{D}_i(\xi^j\varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot \vartheta^i(x) + \delta^j_i \cdot \mathrm{D}_k(\vartheta^i\varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot \xi^k\varphi^{-1}(\varphi(x)). \tag{1.5.29}$$

Vztah (1.5.27) nyní vyplyne přímo z definice komutátoru.

(b) Chceme ukázat, že z podmínek $\mathsf{T}f \circ \vartheta_1 = \xi_1 \circ f$, $\mathsf{T}f \circ \vartheta_2 = \xi_2 \circ f$ vyplývá $\mathsf{T}f \circ [\vartheta_1, \vartheta_2] = [\xi_1, \xi_2] \circ f$. Buď $x \in X$ bod, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém v bodě x, (V, ψ), $\psi = (y^j)$, souřadnicový systém v bodě $f(x)$. Nechť ϑ_1^i, ϑ_2^i (resp. ξ_1^j, ξ_2^j) jsou složky ϑ_1, ϑ_2 (resp. ξ_1, ξ_2) vzhledem k (U, φ) (resp. (V, ψ)). Označme $f^k = y^k f \varphi^{-1}$. Podle (1.5.15)

$$\mathsf{T}_x f([\vartheta_1, \vartheta_2]) = \frac{\partial f^k}{\partial x^j} \left(\vartheta_1^i \frac{\partial \vartheta_2^j}{\partial x^i} - \vartheta_2^i \frac{\partial \vartheta_1^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^k}, \tag{1.5.30}$$

kde derivace na pravé straně jsou uvažovány v bodě $\varphi(x)$. Ovšem podle předpokladu $(\partial f^k / \partial x^p) \vartheta_\nu^p = \xi_\nu^k f$, $\nu = 1, 2$, takže

$$\frac{\partial \xi_\nu^k}{\partial y^l} \frac{\partial f^l}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j \partial x^i} \vartheta_\nu^j + \frac{\partial f^k}{\partial x^j} \frac{\partial \vartheta_\nu^j}{\partial x^i} \tag{1.5.31}$$

a pro složky vektoru (1.5.30) dostáváme

$$\frac{\partial f^k}{\partial x^j} \left(\vartheta_1^i \frac{\partial \vartheta_2^j}{\partial x^i} - \vartheta_2^i \frac{\partial \vartheta_1^j}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \xi_2^k}{\partial y^l} \xi_1^l - \frac{\partial \xi_1^k}{\partial y^l} \xi_2^l, \tag{1.5.32}$$

kde výrazy na pravé straně jsou uvažovány v bodě $f(x)$. Vektor $\mathsf{T}_x f([\vartheta_1, \vartheta_2](x))$ je tedy podle (1.5.24) totožný s vektorem $[\xi_1, \xi_2](f(x))$.

1.6. Fibrovaný prostor p-forem

Buď E m-rozměrný reálný vektorový prostor. Lineární zobrazení $\eta : E \to \mathbf{R}$ se nazývá *lineární forma*, nebo také 1-*forma* na E. Pro $p \geq 1$ celé označme $E^p = E \times E \times \ldots \times E$ (p součinitelů) p-tou kartézskou mocninu vektorového prostoru E. Zobrazení $\eta : E^p \to \mathbf{R}$ se nazývá *antisymetrická p-forma* na E, jsou-li splněny tyto podmínky:

(1) Pro každé i, $1 \leq i \leq p$, a $\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, \xi^{i+1}, \ldots, \xi^p \in E$ zobrazení

$$E \ni \xi \mapsto \eta(\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, \xi, \xi^{i+1}, \ldots, \xi^p) \in \mathbf{R}$$

je lineární.

(2) Pro libovolné indexy i, j takové, že $1 \leq i < j \leq p$, a libovolné vektory $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E$ platí

$$\eta(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_p) = -\eta(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_p), \tag{1.6.1}$$

kde na levé straně vektor ξ_i (resp. ξ_j) stojí na i-tém (resp. j-tém) místě a na pravé straně vektor ξ_i (resp. ξ_j) stojí na j-tém (resp. i-tém) místě.

Antisymetrická p-forma se někdy nazývá také *antisymetrický kovariantní p-tenzor* na E. Pro zjednodušení budeme hovořit prostě o *p-formách* na E, kde $p \geq 1$.

Označme E^* množinu lineárních forem na E. Dále položme $\Lambda^1 E^* = E^*$ a označme $\Lambda^p E^*$ množinu p-forem na E. Tato množina má přirozenou strukturu reálného vektorového prostoru s operacemi sčítání a násobení skalárem definovanými vztahy

$$\begin{aligned} (\eta + \rho)(\xi_1, \ldots, \xi_p) &= \eta(\xi_1, \ldots, \xi_p) + \rho(\xi_1, \ldots, \xi_p), \\ (a\eta)(\xi_1, \ldots, \xi_p) &= a \cdot \eta(\xi_1, \ldots, \xi_p), \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

kde $\eta, \rho \in \Lambda^p E^*$, $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E$ a $a \in \mathbf{R}$. Vektorový prostor $\Lambda^p E^*$, kde $p \geq 1$, se nazývá *prostor p-forem* na E.

Každá p-forma, kde $p > m$, je nulová; platí tedy pro $p > m$, že $\Lambda^p E^* = \{0\}$, kde $m = \dim E$.

Mějme p-formu η a q-formu ρ na E. Pro libovolné vektory $\xi_1, \dots, \xi_{p+q} \in E$ klademe

$$(\eta \wedge \rho)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \eta(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)})\, \rho(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}), \tag{1.6.3}$$

kde $\sigma : \{1, 2, \dots, p+q\} \to \{1, 2, \dots, p+q\}$ je permutace množiny $\{1, 2, \dots, p+q\}$ a $\operatorname{sgn}\sigma = 1$ (resp. $\operatorname{sgn}\sigma = -1$), je-li tato permutace sudá (resp. lichá). Vztah (1.6.3) definuje $(p+q)$-formu $\eta \wedge \rho$ na E, kterou nazýváme *vnější součin* p-formy η a q-formy ρ. Dále pro p-formu η, vektor $\xi \in E$ a vektory $\xi_1, \dots, \xi_{p-1} \in E$ klademe

$$(i_\xi \eta)(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) = \eta(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}). \tag{1.6.4}$$

Tento vztah definuje $(p-1)$-formu $i_\xi \eta$ na E, kterou nazýváme *vnitřní součin* vektoru ξ a formy η.

TEORÉM 1.18. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Zobrazení* $\Lambda^p E^* \times \Lambda^q E^* \ni (\eta, \rho) \mapsto \eta \wedge \rho \in \Lambda^{p+q} E^*$ *je bilineární. Dále pro libovolné formy* $\eta \in \Lambda^p E^*,\ \rho \in \Lambda^q E^*,\ \omega \in \Lambda^r E^*$ *platí*

$$\eta \wedge \rho = (-1)^{pq}\, \rho \wedge \eta, \quad (\eta \wedge \rho) \wedge \omega = \eta \wedge (\rho \wedge \omega). \tag{1.6.5}$$

(b) *Zobrazení* $E \times \Lambda^p E^* \ni (\xi, \eta) \mapsto i_\xi \eta \in \Lambda^{p-1} E^*$ *je bilineární a pro každé* $\xi \in E,\ \eta \in \Lambda^p E^*,\ \rho \in \Lambda^q E^*$ *platí*

$$i_\xi(\eta \wedge \rho) = i_\xi \eta \wedge \rho + (-1)^p\, \eta \wedge i_\xi \rho, \quad i_\xi i_\xi \eta = 0. \tag{1.6.6}$$

DŮKAZ. (a) Tvrzení se prověřuje přímou aplikací definice vnějšího součinu forem.

(b) Tvrzení vyplývá přímo z definic. Dokážeme vztah (1.6.6). Přepišme (1.6.3) do tvaru

$$(\eta \wedge \rho)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \eta(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)})\, \rho(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}), \tag{1.6.7}$$

kde sčítáme přes všechny permutace σ takové, že $\sigma(1) < \ldots < \sigma(p)$, $\sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q)$. Klademe $\xi_1 = \xi$. Výraz (1.6.7) se rozpadá na dva sčítance podle toho, zda $\sigma(1) = 1$ nebo $\sigma(p+1) = 1$. V prvním sčítanci přejdeme k sumaci přes permutace τ množiny indexů $\{2, 3, \dots, p+q\}$, definované vztahem $\tau(2) = \sigma(2), \dots, \tau(p+q) = \sigma(p+q)$; tento sčítanec má pak podle definice vyjádření $(i_\xi \eta \wedge \rho)(\xi_2, \dots, \xi_{p+q})$. Ve druhém sčítanci přejdeme k sumaci přes permutace τ množiny indexů $\{2, 3, \dots, p+q\}$, definované vztahem $\tau(2) = \sigma(1), \dots, \tau(p+1) = \sigma(p), \tau(p+2) = \sigma(p+2), \dots, \tau(p+q) = \sigma(p+q)$. Pak $\sigma(\{1, 2, \dots, p+q\}) = \{\tau(2), \dots, \tau(p+1), 1, \tau(p+2), \dots, \tau(p+q)\}$, takže $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^p \operatorname{sgn}(\tau)$ a druhý sčítanec dostává vyjádření $(-1)^p\, (\eta \wedge i_\xi \rho)(\xi_2, \dots, \xi_{p+q})$. Vztah (1.6.6) nyní vyplývá z (1.6.4).

Přejdeme nyní k vyšetřování bází ve vektorových prostorech $\Lambda^p E^*$ a k určení jejich dimenze. Připomeňme si nejdříve, jak je dané bázi vektorového prostoru E přiřazena tzv. duální báze vektorového prostoru lineárních forem E^*.

Buď $(e_1, \dots, e_m)$ báze E. Z definice vyplývá, že každý vektor $\xi \in E$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace vektorů e_i, t.j. $\xi = \xi^i e_i$; ξ^i, $1 \le i \le m$, jsou složky vektoru ξ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_m)$. Pro každé i je definováno zobrazení $e^i : E \to \mathbf{R}$, přiřazující vektoru ξ jeho i-tou složku ξ^i; evidentně $e^i \in E^*$ a platí

$$e^i(e_j) = \delta^i_j. \tag{1.6.8}$$

Ukážeme, že lineární formy e^i tvoří bázi vektorového prostoru E^*. Buď $\omega \in E^*$ libovolná lineární forma. Pro každé i položme $\omega(e_i) = \omega_i$. Pak pro libovolný vektor $\xi \in E$, $\xi = \xi^i e_i$, platí $\omega(\xi) = \xi^i \omega(e_i) = \xi^i \omega_i = \omega_i e^i(\xi)$, t.j. $\omega = \omega_i e^i$. Každá lineární forma ω se tedy vyjadřuje jako lineární kombinace forem e^i. Předpokládáme-li, že existuje dvojí vyjádření $\omega = \omega_i e^i = \bar{\omega}_i e^i$, pak pro každý vektor $\xi \in E$, $\xi = \xi^i e_i$, platí $(\bar{\omega}_i - \omega_i)\xi^i = 0$, odkud $\omega_i = \bar{\omega}_i$ pro každé i. Vyjádření $\omega = \omega_i e^i$ je tedy jediné a m-tice $(e^1, \dots, e^m)$ je báze vektorového prostoru E^*. Tato báze se nazývá báze *duální* k bázi $(e_1, \dots, e_m)$ vektorového prostoru E. Odsud dostáváme $\dim E^* = \dim E = m$.

TEORÉM 1.19. *Buď E m-rozměrný vektorový prostor, $(e_1, \dots, e_m)$ báze E, $(e^1, \dots, e^m)$ duální báze E^*. Nechť $1 \le p \le m$. Pak množina všech p-forem $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le m$, je báze vektorového prostoru $\Lambda^p E^*$. Pro dimenzi tohoto vektorového prostoru platí* $\dim \Lambda^p E^* = \binom{m}{p}$.

Důkaz. Buď $\omega \in \Lambda^p E^*$ libovolný element, $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E$ libovolné vektory. Napišme $\xi_i = \xi_i^s e_s$. Pak $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \omega(e_{s_1}, \ldots, e_{s_p}) e^{s_1}(\xi_1) \ldots e^{s_p}(\xi_p)$, kde jsme využili definici duální báze. Z antisymetričnosti ω ovšem vyplývá vztah

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) \tag{1.6.9}$$

(součet přes všechny permutace množiny $\{1, 2, \ldots, p\}$), takže

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \omega(e_{s_1}, \ldots, e_{s_p}) \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, e^{s_1}(\xi_{\sigma(1)}) \ldots e^{s_p}(\xi_{\sigma(p)}). \tag{1.6.10}$$

Ukážeme, že

$$e^{s_1} \wedge \ldots \wedge e^{s_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, e^{s_1}(\xi_{\sigma(1)}) \ldots e^{s_p}(\xi_{\sigma(p)}), \tag{1.6.11}$$

čímž bude dokázáno, že formy $e^{s_1} \wedge \ldots \wedge e^{s_p}$ generují $\Lambda^p E^*$. Jelikož podle definice pravá strana (1.6.11) je rovna determinantu[11] $\det(\xi_s^i)$ stupně p, kde $\xi_s^i = e^i(\xi_s)$, stačí dokázat, že levá strana (1.6.11) je rovna tomuto determinantu. Pro $p = 1, 2$ je zřejmě toto tvrzení splněno; důkaz již nyní snadno ukončíme indukcí s využitím Laplaceovy věty o rozvoji determinantu podle prvního řádku.

Zbývá dokázat lineární nezávislost forem $e^{s_1} \wedge \ldots \wedge e^{s_p}$. Předpokládejme, že pro formu $\omega \in \Lambda^p E^*$ platí

$$\sum \omega_{s_1 \ldots s_p} e^{s_1} \wedge \ldots \wedge e^{s_p} = 0 \tag{1.6.12}$$

(sumace přes posloupnosti $\{s_1, \ldots, s_p\}$, splňující podmínku $s_1 < \ldots < s_p$). Zvolme indexy $i_1, \ldots, i_p$ tak, že $i_1 < \ldots < i_p$. Pak $\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = \omega_{i_1 \ldots i_p} = 0$, což jsme chtěli dokázat.

Buď X n-rozměrná varieta, $x \in X$ bod. Jelikož tečný prostor $\mathsf{T}_x X$ má strukturu n-rozměrného vektorového prostoru, je definován prostor lineárních forem $(\mathsf{T}_x X)^*$, který budeme označovat symbolem $\mathsf{T}_x^* X$, a pro každé celé $p \geq 1$ je definován prostor p-forem $\Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$. Ukážeme, že ke každému souřadnicovému systému (U, φ), $\varphi = (x^i)$, v bodě $x \in X$ lze přiřadit jistou bázi vektorového prostoru $\Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$. Zavedeme k tomu nejdříve pojem vnější derivace funkce v bodě x.

Buď $f : W \to \mathbf{R}$ hladká funkce, definovaná na okolí W bodu x, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém v bodě x. Pro každý vektor $\xi \in \mathsf{T}_x X$, vyjádřený ve tvaru $\xi = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$, klademe

$$\mathrm{d}f(x)(\xi) = \mathrm{D}_i(f\varphi^{-1})(\varphi(x))\, \xi^i. \tag{1.6.13}$$

Snadno lze ukázat pomocí věty o derivaci složeného zobrazení, že číslo na pravé straně je definováno nezávisle na volbě souřadnicového systému (U, φ). Vzniká lineární zobrazení $\mathsf{T}_x X \ni \xi \mapsto \mathrm{d}f(x)(\xi) \in \mathbf{R}$, nazývané *vnější derivace* funkce f *v bodě* x. Evidentně $\mathrm{d}f(x) \in \mathsf{T}_x^* X$.

Vezměme za f i-tou souřadnici x^i souřadnicového systému (U, φ).

Teorém 1.20. *Platí:*

(a) *n-tice lineárních forem $(\mathrm{d}x^1(x), \ldots, \mathrm{d}x^n(x))$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathsf{T}_x^* X$, duální k bázi $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x\right)$ tečného prostoru $\mathsf{T}_x X$.*

(b) *Množina všech p-forem $\mathrm{d}x^{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}(x)$, kde $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, tvoří bázi vektorového prostoru $\Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$.*

Důkaz. (a) Podle (1.6.13) $\mathrm{d}x^i(x)(\xi) = \xi^i$ a tvrzení vyplývá z definice duální báze.

(b) Tvrzení je přímým důsledkem Teorému 1.19.

Báze vektorového prostoru $\Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$, $\{\mathrm{d}x^{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}(x)\}$, $i_1 < \ldots < i_p$, se nazývá *asociovaná* se souřadnicovým systémem (U, φ).

Buď (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X, $x \in U$ bod. Z Teorému 1.20 vyplývá, že každá p-forma $\omega \in \Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$ má jediné vyjádření ve tvaru

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x^{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}(x), \tag{1.6.14}$$

[11] $i = s_1, \ldots, s_p$ a $s = 1, \ldots, p$.

kde $\omega_{i_1\dots i_p} \in \mathbf{R}$ a sčítá se přes všechny *rostoucí* posloupnosti indexů $i_1, \dots, i_p$. Čísla $\omega_{i_1\dots i_p}$ se nazývají *složky* p-formy ω vzhledem k bázi vektorového prostoru $\Lambda^p \mathsf{T}^*_x X$, asociované s (U, φ), nebo prostě *složky* vzhledem k (U, φ).

Nechť $1 \le p \le n$. Klademe $\Lambda^p \mathsf{T}^* X = \bigcup \Lambda^p \mathsf{T}^*_x X$ (sjednocení přes všechny body $x \in X$). Dále pro $\omega \in \Lambda^p \mathsf{T}^*_x X$ klademe $\tau_p(\omega) = x$; vzniká surjektivní zobrazení $\tau_p : \Lambda^p \mathsf{T}^* X \to X$. Buď (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém v bodě x. Klademe

$$\mathsf{T}^*\varphi(\omega) = (x^i(x), \omega_{i_1\dots i_p}), \tag{1.6.15}$$

kde $\omega_{i_1\dots i_p}$ jsou složky ω vzhledem k (U, φ). Zobrazení $\mathsf{T}^*\varphi$ je bijekce množiny $\tau_p^{-1}(U) = \Lambda^p \mathsf{T}^* U$ na otevřenou množinu $\varphi(U) \times \mathbf{R}^N$ v $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$, kde $N = \binom{n}{p}$ (Teorém 1.19). Nechť (V, ψ), $\psi = (y^i)$, je další souřadnicový systém na X takový, že $U \cap V \neq \emptyset$. Pak je definováno zobrazení $\mathsf{T}^*\psi(\mathsf{T}^*\varphi)^{-1}$: $\varphi(U \cap V) \times \mathbf{R}^N \to \psi(U \cap V) \times \mathbf{R}^N$ a platí

$$\mathsf{T}^*\psi(\mathsf{T}^*\varphi)^{-1}(x^i, \omega_{i_1\dots i_p}) = (y^j, \bar\omega_{j_1\dots j_p}) = (y^j, \mathrm{D}_{j_1}(x^{i_1}\psi^{-1})(\psi(x)) \dots \mathrm{D}_{j_p}(x^{i_p}\psi^{-1})(\psi(x))\, \omega_{i_1\dots i_p}), \tag{1.6.16}$$

kde $\bar\omega_{j_1\dots j_p}$ jsou složky ω vzhledem k (V, ψ). Zobrazení $\mathsf{T}^*\psi(\mathsf{T}^*\varphi)^{-1}$ má tedy rovnice

$$\begin{aligned} y^j &= y^j(x^1, \dots, x^n), \\ \bar\omega_{j_1\dots j_p} &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{j_p}}\, \omega_{i_1\dots i_p} \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

a je evidentně isomorfismus.

Teorém 1.21. *Buď X n-rozměrná varieta. Na množině $\Lambda^p \mathsf{T}^* X$ existuje jediná $(n+N)$-rozměrná hladká struktura, kde $N = \binom{n}{p}$, taková, že pro každý souřadnicový systém (U, φ) na X je $(\Lambda^p \mathsf{T}^* U, \mathsf{T}^*\varphi)$ souřadnicový systém na $\Lambda^p \mathsf{T}^* X$.*

Důkaz. Důkaz je založen na využití Teorému 1.9 a provádí se v plné analogii s důkazem Teorému 1.12.

Důsledek 1. *Uvažujme množinu $\Lambda^p \mathsf{T}^* X$ s výše definovanou hladkou strukturou. Pak zobrazení τ_p : $\Lambda^p \mathsf{T}^* X \to X$ je hladké.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá ze souřadnicového vyjádření zobrazení τ_p.

Varietu $\Lambda^p \mathsf{T}^* X$ spolu s vektorovou strukturou na množinách $\Lambda^p \mathsf{T}^*_x X$ a s hladkým zobrazením τ_p nazýváme *fibrovaný prostor p-forem* variety X. Zobrazení τ_p nazýváme *kanonická projekce* fibrovaného prostoru p-forem $\Lambda^p \mathsf{T}^* X$.

1.7. Diferenciální formy

Buď X n-rozměrná varieta, $p \ge 1$ celé číslo, $\Lambda^p \mathsf{T}^* X$ fibrovaný prostor p-forem variety X, τ_p : $\Lambda^p \mathsf{T}^* X \to X$ kanonická projekce. Zobrazení $\eta : V \to \Lambda^p \mathsf{T}^* X$, kde $V \subset X$ je otevřená množina, takové, že platí

$$\tau_p \circ \eta = \mathrm{id}_V, \tag{1.7.1}$$

se nazývá *diferenciální p-forma* na V. Diferenciální p-forma na X se nazývá *globálně definovaná.* Diferenciální 1-formu nazýváme také *lineární diferenciální forma.*

K tomu, aby zobrazení $\eta : V \to \Lambda^p \mathsf{T}^* X$ byla diferenciální p-forma je nutné a stačí, aby obraz $\eta(x)$ každého bodu $x \in V$ ležel v množině $\Lambda^p \mathsf{T}^*_x X$.

Funkci $f : V \to \mathbf{R}$ nazýváme také *diferenciální* 0-forma.

Množina diferenciálních p-forem, kde $p \ge 0$, definovaných na V, má přirozenou strukturu modulu nad okruhem funkcí; *součet* $\eta + \rho$ diferenciální p-formy η a diferenciální q-formy ρ a *násobek* $a \cdot \eta$ diferenciální p-formy η *skalárem* $a \in \mathbf{R}$ je definován vztahem

$$\begin{aligned} (\eta + \rho)(x) &= \eta(x) + \rho(x), \\ (a \cdot \eta)(x) &= a \cdot \eta(x), \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

kde $x \in V$.

Na diferenciální formy se přirozeným způsobem přenáší algebraické operace vnějšího a vnitřního součinu, definované pro formy na vektorových prostorech. Buď η diferenciální p-forma na otevřené množině $V \subset X$, ρ diferenciální q-forma na V a ξ vektorové pole na V. Předpokládejme, že $p \geq 0$, $q \geq 1$. Klademe pro každé $x \in V$

$$\begin{aligned} (\eta \wedge \rho)(x) &= \eta(x) \wedge \rho(x), \\ (i_\xi \rho)(x) &= i_{\xi(x)} \rho(x). \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Tímto vztahem je definována diferenciální $(p+q)$-forma $\eta \wedge \rho$ na V (resp. diferenciální $(q-1)$-forma $i_\xi \rho$ na V), nazývaná *vnější součin* diferenciální p-formy η a diferenciální q-formy ρ (resp. *vnitřní součin* vektorového pole ξ a diferenciální q-formy ρ). Pro diferenciální 0-formu $\eta = f$ píšeme také $f \wedge \rho = f\rho$.

Teorém 1.22. *Platí:*

(a) *Buďte η, ρ diferenciální p-formy, ω diferenciální q-forma a ν diferenciální r-forma na otevřené množině $V \subset X$, buďte f, g funkce na V. Pak platí vztahy:*[12]

$$\begin{aligned} (f\eta + g\rho) \wedge \omega &= (f\eta) \wedge \omega + (g\rho) \wedge \omega, \\ \eta \wedge \omega &= (-1)^{pq} \omega \wedge \eta, \\ (\eta \wedge \omega) \wedge \nu &= \eta \wedge (\omega \wedge \nu). \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

(b) *Buďte η, ρ diferenciální p-formy, ω diferenciální q-forma na V, f, g funkce na V, ξ, ζ vektorová pole na V. Předpokládejme, že $p, q \geq 1$. Pak platí vztahy:*

$$\begin{aligned} i_{(f\xi + g\zeta)} \eta &= f i_\xi \eta + g i_\zeta \eta, \\ i_\xi (f\eta + g\rho) &= f i_\xi \eta + g i_\xi \rho, \\ i_\xi (\eta \wedge \omega) &= i_\xi \eta \wedge \omega + (-1)^p \eta \wedge i_\xi \omega. \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

Důkaz. Tvrzení vyplývá z definic a z Teorému 1.18.

Buď η diferenciální p-forma definovaná na otevřené množině $V \subset X$, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X takový, že $U \subset V$. Pro každé $x \in U$ má vektor $\eta(x) \in \Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$ jediné vyjádření ve tvaru

$$\eta(x) = \sum \eta_{i_1 \ldots i_p}(x) (\mathrm{d}x^{i_1})(x) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}x^{i_p})(x), \tag{1.7.6}$$

(sumace přes rostoucí posloupnosti $(i_1, \ldots, i_p)$), kde $\eta_{i_1 \ldots i_p}(x)$ jsou složky p-formy $\eta(x) \in \Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$ vzhledem k (U, φ). Pro každé i $\mathrm{d}x^i$ je lineární diferenciální forma na U; s použitím definice vnějšího součinu diferenciálních forem tedy dostáváme pro zúžení diferenciální p-formy η na U vyjádření

$$\eta = \sum \eta_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}. \tag{1.7.7}$$

(sumace přes rostoucí posloupnosti $(i_1, \ldots, i_p)$). Výraz na pravé straně je diferenciální p-forma na U nazývaná *souřadnicové vyjádření* η vzhledem k souřadnicovému systému (U, φ); funkce $\eta_{i_1 \ldots i_p} : U \to \mathbf{R}$ se nazývají *složky* η vzhledem k (U, φ).

Formuli (1.7.7) lze přepsat v jiném tvaru, kde se sčítá přes *všechny* posloupnosti indexů $(i_1, \ldots, i_p)$, ne pouze přes posloupnosti rostoucí. K tomu klademe pro libovolnou permutaci σ množiny $\{1, 2, \ldots, p\}$

$$\eta_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)}} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \eta_{i_1 \ldots i_p} \tag{1.7.8}$$

a $\eta_{i_1 \ldots i_p} = 0$, jsou-li alespoň dva z indexů stejné. Těmito vztahy je systém funkcí $\{\eta_{i_1 \ldots i_p}\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$, *dodefinován* v systém $\{\eta_{i_1 \ldots i_p}\}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n$, *antisymetrický* ve všech indexech. Nyní je zřejmé, že η lze vyjádřit ve tvaru

$$\eta = \frac{1}{p!} \eta_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}, \tag{1.7.9}$$

[12] Odtud rovněž vyplývá vztah $(f\eta) \wedge \omega = \eta \wedge (f\omega)$.

kde se sčítá přes všechny hodnoty indexů. Tuto formuli budeme často používat bez explicitního uvádění předpokladu, že složky $\eta_{i_1\dots i_p}$ jsou antisymetrické.

Uvažujme diferenciální p-formu η (1.7.9), diferenciální q-formu ω a vektorové pole ξ na V. Nechť vzhledem k (U,φ)

$$\omega = \frac{1}{q!}\omega_{j_1\dots j_q}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}, \quad \xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.7.10}$$

Pak podle definice

$$\eta\wedge\omega = \frac{1}{p!q!}\eta_{i_1\dots i_p}\omega_{j_1\dots j_q}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}. \tag{1.7.11}$$

K výrazu typu (1.7.7), kde se sčítá přes rostoucí posloupnosti indexů, bychom přešli antisymetrizací koeficientů a jejich vynásobením koeficientem $(p+q)!$. Dále z definice dostáváme $i_\xi \mathrm{d}x^i = \xi^i$ a s využitím Teorému 1.22.

$$i_\xi\eta = \sum \xi^i\eta_{ik_1\dots k_{p-1}}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{k_{p-1}}, \tag{1.7.12}$$

kde se sčítá přes rostoucí posloupnosti $(k_1,\dots,k_{p-1})$ a přes index i od 1 do n.

Buď $\Phi : X \to Y$ zobrazení n-rozměrné variety X do m-rozměrné variety Y, buď ρ diferenciální p-forma na Y. Předpokládejme, že zobrazení Φ je hladké. Pro každé $x\in X$ a libovolné tečné vektory $\xi_1,\dots,\xi_p\in \mathsf{T}_xX$ klademe

$$(\Phi^*\rho)(x)(\xi_1,\dots,\xi_p) = \rho(\Phi(x))(\mathsf{T}_x\Phi(\xi_1),\dots,\mathsf{T}_x\Phi(\xi_p)). \tag{1.7.13}$$

Snadno je vidět, že $(\Phi^*\rho)(x)$ je prvek prostoru $\Lambda^p\mathsf{T}^*_xX$, t.j. p-forma na T_xX. Vztah (1.7.13) tedy definuje diferenciální p-formu na X, kterou nazýváme *inverzní obraz* diferenciální p-formy ρ vzhledem k zobrazení Φ.[13]

Odvodíme souřadnicové vyjádření diferenciální p-formy $\Phi^*\rho$. Buď (U,φ), $\varphi=(x^i)$, souřadnicový systém na X, (V,ψ), $\psi=(y^\sigma)$, souřadnicový systém na Y a předpokládejme, že $\Phi(U)\subset V$. Nechť

$$\rho = \frac{1}{p!}\rho_{\sigma_1\dots\sigma_p}\mathrm{d}y^{\sigma_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}y^{\sigma_p} \tag{1.7.14}$$

je souřadnicové vyjádření ρ vzhledem k (V,ψ). Nechť $x\in X$ a $\xi_1,\dots,\xi_p\in\mathsf{T}_xX$. Má-li vektor ξ_k vyjádření $\xi_k=\xi_k^i(\partial/\partial x^i)_x$, pak vektor $\mathsf{T}_x\Phi(\xi_k)$ má vyjádření

$$\mathsf{T}_x\Phi(\xi_k) = \left(\frac{\partial y^\sigma\Phi\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)}\xi_k^i\left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\right)_{\Phi(x)}. \tag{1.7.15}$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}(\Phi^*\rho)(x)(\xi_1,\dots,\xi_p) &= \frac{1}{p!}\rho_{\sigma_1\dots\sigma_p}(\Phi(x))\frac{\partial y^{\nu_1}\Phi\varphi^{-1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{\nu_p}\Phi\varphi^{-1}}{\partial x^{j_p}}\xi_1^{j_1}\ldots\xi_p^{j_p}\cdot \\ \cdot\quad (\mathrm{d}y^{\sigma_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}y^{\sigma_p})(\Phi(x))&\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right)_{\Phi(x)},\dots,\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_p}}\right)_{\Phi(x)}\right),\end{aligned} \tag{1.7.16}$$

kde derivace na pravé straně jsou uvažovány v bodě $\varphi(x)$. Vzhledem k antisymetričnosti $\rho_{\sigma_1\dots\sigma_p}$ lze v tomto výrazu součinitel u $\rho_{\sigma_1\dots\sigma_p}$ nahradit neantisymetrickým výrazem $\delta^{\sigma_1}_{\nu_1}\ldots\delta^{\sigma_p}_{\nu_p}$. Dosadíme-li ještě $\xi_k^i=\mathrm{d}x^i(x)(\xi_k)$ a vypustíme proměnnou x, dostaneme

$$\Phi^*\rho = \frac{\partial y^{\nu_1}\Phi\varphi^{-1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{\nu_p}\Phi\varphi^{-1}}{\partial x^{j_p}}(\rho_{\nu_1\dots\nu_p}\Phi)\cdot\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_p} \tag{1.7.17}$$

(sumace přes všechny hodnoty indexů $\nu_1,\dots,\nu_p$ a přes rostoucí posloupnosti $(j_1,\dots,j_p)$), což je hledané souřadnicové vyjádření.

Diferenciální p-forma $\eta : V\to\Lambda^p\mathsf{T}^*X$ se nazývá *spojitá* (resp. *hladká*), je-li zobrazení η spojité (resp. hladké). Souřadnicové vyjádření η vzhledem k souřadnicovému systému (U,φ) a s ním asociovanému

[13] Nebo také *pull-back* ρ vzhledem k Φ.

souřadnicovému systému $(\Lambda^p \mathsf{T}^* U, \mathsf{T}^* \varphi)$ je zobrazení $(x^i) \mapsto (x^i, \eta_{j_1 \dots j_p}(x^i))$, kde $\eta_{j_1 \dots j_p}$ jsou složky η vzhledem k (U, φ); diferenciální p-forma η je tedy spojitá (resp. hladká) tehdy a jen tehdy, když její složky jsou spojité (resp. diferencovatelné třídy C^∞).

Jelikož spojitost (resp. hladkost) se prověřuje pomocí vyjádření diferenciální formy vzhledem k nějakému souřadnicovému systému, přímým nahlédnutím vidíme, že následující diferenciální formy jsou spojité (resp. hladké): součet dvou spojitých (resp. hladkých) p-forem, vnější součin spojitých (resp. hladkých) diferenciálních forem, vnitřní součin spojitého (resp. hladkého) vektorového pole a spojité (resp. hladké) diferenciální formy, pull-back spojité (resp. hladké) diferenciální formy vzhledem k hladkému zobrazení.

Všude až do konce tohoto odstavce se budeme zabývat *hladkými* diferenciálními formami.

Buď $V \subset X$ otevřená množina. Označme $\Omega^p(V)$, $p \geq 0$, množinu hladkých diferenciálních p-forem definovaných na V; pro $p = 0$ píšeme také $\Omega^0(V) = C^\infty(V)$. Množina $C^\infty(V)$ má přirozenou strukturu *komutativního okruhu s jednotkou*, definovanou operacemi sčítání a násobení funkcí. Množinu $\Omega^p(V)$ budeme uvažovat s přirozenou algebraickou strukturou definovanou operacemi sčítání hladkých diferenciálních p-forem a násobení hladkou funkcí $C^\infty(V) \times \Omega^p(V) \ni (f, \eta) \mapsto f\eta \in \Omega^p(V)$. Pro libovolné $f, g \in C^\infty(V)$, $\eta, \rho \in \Omega^p(V)$ platí

$$
\begin{aligned}
f(\eta + \rho) &= f\eta + f\rho, \\
f(g\eta) &= (fg)\eta, \\
(f + g)\eta &= f\eta + g\eta.
\end{aligned}
\tag{1.7.18}
$$

Uvažovaná algebraická struktura je tedy struktura *modulu* nad okruhem $C^\infty(V)$. Množinu $\Omega^p(V)$ s touto strukturou nazýváme *modul hladkých diferenciálních p-forem* na V.

Teorém 1.23. *Platí:*

(a) *Buďte $\Phi : X \to Y$, $\Psi : Y \to Z$ hladká zobrazení variet, η hladká diferenciální p-forma na Z. Pak*

$$
(\Psi\Phi)^* \eta = \Phi^* \Psi^* \eta. \tag{1.7.19}
$$

(b) *Buď $\Phi : X \to Y$ hladké zobrazení variet, η, ρ diferenciální p-formy na Y, ω diferenciální q-forma na Y, $p, q \geq 0$ celá čísla. Pak platí*

$$
\begin{aligned}
\Phi^*(\eta + \rho) &= \Phi^* \eta + \Phi^* \rho, \\
\Phi^*(\omega \wedge \rho) &= \Phi^* \omega \wedge \Phi^* \rho.
\end{aligned}
\tag{1.7.20}
$$

Důkaz. (a) Rovnost (1.7.19) je třeba dokázat v každém bodě $x \in X$. Použijeme k tomu souřadnicové vyjádření (1.7.17) inverzního obrazu. Buď (U, φ), $\varphi = (x^i)$, (resp. (V, ψ), $\psi = (y^\sigma)$, resp. (W, χ), $\chi = (z^\nu)$) souřadnicový systém na X (resp. Y, resp. Z). Předpokládejme, že $\Phi(U) \subset V$, $\Psi(V) \subset W$. Pak tvrzení ihned vyplyne z pravidla pro derivaci složené funkce

$$
\frac{\partial z^\nu \Psi \Phi \varphi^{-1}}{\partial x^j} = \frac{\partial z^\nu \Psi \psi^{-1}}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial y^\sigma \Phi \varphi^{-1}}{\partial x^j}. \tag{1.7.21}
$$

(b) Vztahy (1.7.20) vyplývají přímo z definice.

Zavedeme nyní pojem vnější derivace hladké diferenciální formy.

Buď $V \subset X$ otevřená množina, $f : V \to \mathbf{R}$ hladká funkce (0-forma), $\mathrm{d}f(x)$ vnější derivace funkce f v bodě $x \in V$ (1.6.13). Korespondence $V \ni x \mapsto \mathrm{d}f(x) \in \Lambda^1 \mathsf{T}^* X = \mathsf{T}^* X$ je zřejmě lineární diferenciální forma na V, kterou označujeme $\mathrm{d}f$ a nazýváme *vnější derivace* funkce f.

Je-li (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X takový, že $U \subset V$, pak na U

$$
\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i, \tag{1.7.22}
$$

kde pro zjednodušení $\partial f/\partial x^i$ označuje derivaci $\partial(f\varphi^{-1})/\partial x^i$. Toto vyjádření dostaneme přímo z (1.6.13) s využitím identity $\xi^i = \mathrm{d}x^i(x)\cdot\xi$. Jelikož složky $\partial f/\partial x^i$ jsou diferencovatelné funkce třídy C^∞, vnější derivace hladké funkce je hladká lineární diferenciální forma, t.j. element $\Omega^1(V)$.

Pro libovolné dvě hladké funkce $f, g : V \to \mathbf{R}$ evidentně platí

$$\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f. \tag{1.7.23}$$

Dále z (1.7.22) vyplývá, že pro libovolný další souřadnicový systém $(\bar{U},\bar{\varphi})$, $\bar{\varphi} = (\bar{x}^i)$, $\bar{U}\subset V$ platí

$$\mathrm{d}\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j. \tag{1.7.24}$$

Buď nyní ω hladká diferenciální p-forma na V, t.j. element prostoru $\Omega^p(V)$. Nechť (U,φ), $(\bar{U},\bar{\varphi})$ jsou výše zavedené souřadnicové systémy. ω lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \omega &= \sum \omega_{j_1\dots j_p}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}, \\ \omega &= \sum \bar{\omega}_{i_1\dots i_p}\mathrm{d}\bar{x}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\bar{x}^{i_p} \end{aligned} \tag{1.7.25}$$

(sumace přes rostoucí posloupnosti). Odtud s využitím (1.7.24) snadno dostaneme *transformační vztah* pro složky ω

$$\bar{\omega}_{i_1\dots i_p} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}}\omega_{j_1\dots j_p} \tag{1.7.26}$$

(sumace přes všechny hodnoty indexů $j_1,\dots,j_p$).

Transformační vztah pro složky formy ω využijeme v následující konstrukci. Klademe

$$\omega'_U = \sum \mathrm{d}\omega_{j_1\dots j_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_p} \tag{1.7.27}$$

(sumace přes rostoucí posloupnosti), kde $\mathrm{d}\omega_{j_1\dots j_p}$ je vnější derivace funkce $\omega_{j_1\dots j_p}$. Tímto vztahem je definována hladká diferenciální $(p+1)$-forma ω'_U na U. Souřadnicový systém (U,φ) takový, že $U\subset V$, lze ovšem volit libovolně. Ukážeme, že pro libovolné dva souřadnicové systémy (U,φ), $(\bar{U},\bar{\varphi})$ platí

$$\omega'_U = \omega'_{\bar{U}} \tag{1.7.28}$$

na $U\cap\bar{U}$. Vnější derivací funkce (1.7.26) dostaneme

$$\mathrm{d}\bar{\omega}_{i_1\dots i_p} = \omega_{j_1\dots j_p}\cdot\mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}}\right) + \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}}\,\mathrm{d}\omega_{j_1\dots j_p}. \tag{1.7.29}$$

Dosazením tohoto výrazu do $\omega'_{\bar{U}}$ a využitím (1.7.24) a identit

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^k}\,\mathrm{d}\bar{x}^i\wedge\mathrm{d}\bar{x}^k = 0 \tag{1.7.30}$$

snadno odvodíme (1.7.28). Formy ω'_U, $\omega'_{\bar{U}}$ tedy na průniku svých definičních oborů splývají. Znamená to, že existuje jediná hladká diferenciální $(p+1)$-forma $\mathrm{d}\omega$ na V taková, že pro každý souřadnicový systém (U,φ), $\varphi = (x^i)$, na X, kde $U\subset V$, platí

$$\mathrm{d}\omega = \sum \mathrm{d}\omega_{j_1\dots j_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}. \tag{1.7.31}$$

Tuto hladkou diferenciální $(p+1)$-formu nazýváme *vnější derivace* hladké diferenciální p-formy ω.

Shrneme základní vlastnosti vnější derivace.

TEORÉM 1.24. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Pro libovolné $\eta,\rho\in\Omega^p(V)$ a $a,b\in\mathbf{R}$*

$$\mathrm{d}(a\eta+b\rho) = a\cdot\mathrm{d}\eta + b\cdot\mathrm{d}\rho. \tag{1.7.32}$$

(b) *Pro každé* $\omega \in \Omega^p(V)$
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0. \tag{1.7.33}$$

(c) *Pro libovolné* $\eta \in \Omega^p(V)$ *a* $\omega \in \Omega^q(V)$
$$\mathrm{d}(\eta \wedge \omega) = \mathrm{d}\eta \wedge \omega + (-1)^p \eta \wedge \mathrm{d}\omega. \tag{1.7.34}$$

(d) *Pro libovolnou otevřenou množinu* $W \subset V$ *a* $\eta \in \Omega^p(V)$
$$\mathrm{d}(\eta|_W) = \mathrm{d}\eta|_W. \tag{1.7.35}$$

Důkaz. (a) Tvrzení se dokazuje v každém bodě a je přímým důsledkem definice vnější derivace.

(b) Pro $p = 0$ a $\omega = f$ dostaneme z definice
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge \mathrm{d}x^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = 0. \tag{1.7.36}$$
Nechť $p > 0$. Uvažujme diferenciální formu ω (1.7.25) a její vnější derivaci (1.7.31). Souřadnicové vyjádření diferenciální formy $\mathrm{d}\omega$ lze přepsat ve tvaru
$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{\partial \omega_{i_2 \dots i_{p+1}}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \omega_{i_1 i_3 \dots i_{p+1}}}{\partial x^{i_2}} + \ldots + (-1)^p \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{i_{p+1}}}\right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+1}}. \tag{1.7.37}$$
Na základě stejné argumentace jako v případě funkce f odtud již přímo dostáváme (1.7.33).

(c) Vztah (1.7.34) dostaneme přímým výpočtem z (1.7.11).

(d) Tvrzení vyplývá přímo z definice vnější derivace.

Teorém 1.25. *Buď* $\Phi : X \to Y$ *hladké zobrazení variet,* $W \subset Y$ *otevřená množina a* η *hladká diferenciální* p*-forma na* W*. Pak*
$$\Phi^* \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\Phi^* \eta. \tag{1.7.38}$$

Důkaz. Je třeba dokázat, že rovnost (1.7.38) platí v každém bodě otevřené množiny $\Phi^{-1}(W) \subset X$. Buď $x \in X$ bod takový, že $\Phi(x) \in W$, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, (resp. (V, ψ), $\psi = (y^\sigma)$) souřadnicový systém v bodě x (resp. $\Phi(x)$) a předpokládejme, že $\Phi(U) \subset V \subset W$.

Ukážeme nejdříve, že tvrzení platí pro diferenciální 0-formu $\eta = f$. Buď $\xi \in \mathsf{T}_x X$ libovolný vektor, $\xi = \xi^i (\partial/\partial x^i)_x$ jeho vyjádření vzhledem k (U, φ). Vektor $\mathsf{T}_x \Phi(\xi)$ lze vyjádřit vzhledem k (V, ψ) podle (1.7.15). S využitím definice Φ^* a vnější derivace funkce dostáváme po jednoduchém výpočtu
$$\begin{aligned} (\Phi^* \mathrm{d}f)(x)(\xi) &= \left(\frac{\partial f}{\partial y^\sigma}\right)_{\Phi(x)} \left(\frac{\partial y^\sigma \Phi \varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} \xi^i, \\ (\mathrm{d}\Phi^* f)(x)(\xi) &= \left(\frac{\partial f \Phi \varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} \xi^i. \end{aligned} \tag{1.7.39}$$
Věta o derivaci složeného zobrazení, aplikovaná na zobrazení $x' \mapsto f\psi^{-1}\psi\Phi\varphi^{-1}(x')$, již vede k rovnosti čísel na pravé straně. Vztah (1.7.38) tedy platí pro funkce.

Ukážeme, že platí-li (1.7.38) pro diferenciální $(p-1)$-formy, kde $p \geq 1$, pak platí také pro diferenciální p-formy. Napišme diferenciální p-formu η na W ve tvaru $\eta = \eta_\sigma \wedge \mathrm{d}y^\sigma$, kde η_σ jsou nějaké diferenciální $(p-1)$-formy na W. Pak s využitím Teorému 1.23, indukčního předpokladu a Teorému 1.24, (b), (c), dostaneme
$$\begin{aligned} \Phi^* \mathrm{d}\eta &= \Phi^* \mathrm{d}\eta_\sigma \wedge \Phi^* \mathrm{d}y^\sigma = \mathrm{d}\Phi^* \eta_\sigma \wedge \Phi^* \mathrm{d}y^\sigma = \mathrm{d}(\Phi^* \eta_\sigma \wedge \Phi^* \mathrm{d}y^\sigma) - (-1)^{p-1} \Phi^* \eta_\sigma \wedge \mathrm{d}\Phi^* \mathrm{d}y^\sigma = \\ &= \mathrm{d}\Phi^* (\eta_\sigma \wedge \mathrm{d}y^\sigma) = \mathrm{d}\Phi^* \eta, \end{aligned} \tag{1.7.40}$$

což jsme chtěli dokázat.

Hladká diferenciální p-forma $\eta \in \Omega^p(V)$ se nazývá *uzavřená*, platí-li $\mathrm{d}\eta = 0$; η se nazývá *exaktní*, existuje-li hladká diferenciální $(p-1)$-forma $\rho \in \Omega^{p-1}(V)$ tak, že $\mathrm{d}\rho = \eta$. Každá exaktní diferenciální p-forma je uzavřená (Teorém 1.24, (b)). Obrácené tvrzení obecně neplatí. Následující tvrzení (tzv. *Poincaréovo lemma*) se zabývá otázkou řešitelnosti rovnice $\eta = \mathrm{d}\rho$ vzhledem k ρ pro speciálně volené definiční obory V.

TEORÉM 1.26. *Nechť $p \geq 1$, nechť $\eta \in \Omega^p(V)$, kde $V \subset \mathbf{R}^n$ je okolí počátku 0 takové, že pro každé $x \in V$ úsečka spojující 0 a x leží ve V. Předpokládejme, že diferenciální p-forma η je uzavřená. Pak existuje hladká diferenciální $(p-1)$-forma $\rho \in \Omega^{p-1}(V)$ tak, že $\eta = \mathrm{d}\rho$.*

DŮKAZ. Označme J multiindex $(j_1, \ldots, j_p)$, kde $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_p \leq n$, K multiindex $(k_1, \ldots, k_{p-1})$, kde $1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_{p-1} \leq n$, a položme

$$\mathrm{d}x^J = \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_p}, \quad \mathrm{d}x^K = \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{k_{p-1}}. \tag{1.7.41}$$

η má jediné vyjádření

$$\eta = \sum_J a_J \mathrm{d}x^J. \tag{1.7.42}$$

Označme $\chi : (0,1) \times V \to V$ zobrazení $(t, x) \mapsto t \cdot x$; χ je diferencovatelné a platí $\chi^*\eta = \eta_1 + \mathrm{d}t \wedge \eta_0$, kde $\eta_1 \in \Omega^p(I \times V)$, $\eta_0 \in \Omega^{p-1}(I \times V)$, $I = (0,1)$, a η_1, η_0 neobsahují $\mathrm{d}t$. η_1 a η_0 mají tedy vyjádření

$$\eta_1 = \sum_J b_J \mathrm{d}x^J, \quad \eta_0 = \sum_K c_K \mathrm{d}x^K, \tag{1.7.43}$$

kde $b_J, c_K : I \times V \to \mathbf{R}$ jsou diferencovatelné funkce. Pro každé x funkce $t \mapsto c_K(t,x)$ je zúžení spojité funkce, definované na intervalu $[0,1]$; existuje tedy integrál $\int_0^1 c_K(t,x)\mathrm{d}t$ a klademe

$$I(\eta) = \sum_K \left(\int_0^1 c_K(t,x)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^K. \tag{1.7.44}$$

Určíme $I(\mathrm{d}\eta)$. Dostáváme s využitím Teorému 1.25.

$$\chi^*\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\chi^*\eta = \sum_J \frac{\partial b_J}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^J + \mathrm{d}t \wedge \left(\sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t} \mathrm{d}x^J - \sum_K \frac{\partial c_K}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K \right). \tag{1.7.45}$$

Ze vztahu $\chi^*\mathrm{d}x^i = x^i \mathrm{d}t + t\mathrm{d}x^i$ a z definice η_1 ovšem vyplývá, že b_J obsahuje faktor t^p; odtud

$$\int_0^1 \frac{\partial b_J(t,x)}{\partial t}\mathrm{d}t = b_J(1,x) - b_J(0,x) = b_J(1,x) = a_J(x) \tag{1.7.46}$$

a s využitím věty o derivaci integrálu podle parametru

$$\begin{aligned} I(\mathrm{d}\eta) &= \sum_J \left(\int_0^1 \frac{\partial b_J(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^J - \sum_K \left(\int_0^1 \frac{\partial c_K(t,x)}{\partial x^i}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K = \\ &= \eta - \sum_K \frac{\partial \int_0^1 c_K(t,x)\mathrm{d}t}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K = \eta - \mathrm{d}I(\eta). \end{aligned} \tag{1.7.47}$$

Nyní z předpokladu $\mathrm{d}\eta = 0$ vyplývá $I(\mathrm{d}\eta) = 0$ a tedy $\eta = \mathrm{d}\rho$, kde $\rho = I(\eta)$.

DŮSLEDEK. *Buď X hladká n-rozměrná varieta, η hladká diferenciální p-forma na otevřené množině $V \subset X$. Předpokládejme, že η je uzavřená. Pak ke každému bodu $x \in V$ existuje okolí U bodu x a hladká diferenciální $(p-1)$-forma ρ definovaná na U tak, že $\eta|_U = \mathrm{d}\rho$.*

Důkaz. Buď $x \in X$ bod, buď (U, φ) takový souřadnicový systém na X v bodě x, že $\varphi(x) = 0$ a $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená koule. S označením z důkazu Teorému 1.26 klademe $\rho = \varphi^* I((\varphi^{-1})^*\eta)$. Pak $\mathrm{d}\rho = \varphi^* \mathrm{d}I((\varphi^{-1})^*\eta) = \varphi^*((\varphi^{-1})^*\eta - I(\mathrm{d}(\varphi^{-1})^*\eta)) = \eta|_U$, což jsme chtěli dokázat.

Uvažujme hladkou diferenciální p-formu η a hladké vektorové pole ξ na X. Nechť (α_t), $t \in \mathbf{R}$, je lokální jednoparametrická grupa vektorového pole ξ. Buď $x \in X$ libovolný bod. Existuje okolí U bodu x a $\varepsilon > 0$ tak, že α_t je definované na U pro každé $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (Teorém 1.16, Důsledek 2). Je tedy definován inverzní obraz $\alpha_t^*\eta$ diferenciální p-formy η a představuje hladkou diferenciální p-formu na U. Vzniká hladká[14] křivka $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto (\alpha_t^*\eta)(x) \in \Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$ ve vektorovém prostoru $\Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$ taková, že $(\alpha_0^*\eta)(x) = \eta(x)$. Derivace této křivky v bodě $t = 0$ je tedy opět element vektorového prostoru $\Lambda^p \mathsf{T}_x^* X$. Klademe

$$(\partial_\xi \eta)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha_t^*\eta)(x)\bigg|_{t=0}. \tag{1.7.48}$$

Zobrazení $x \mapsto (\partial_\xi \eta)(x)$ je hladká diferenciální p-forma na X, nazývaná *Lieova derivace* η podél vektorového pole ξ.

Snadno lze získat souřadnicové vyjádření Lieovy derivace. Buď (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X, $\eta_{i_1 \dots i_p}$ (resp. ξ^i) složky η (resp. ξ) vzhledem k (U, φ) (porov. (1.7.10)). Pak

$$\alpha_t^*\eta = \frac{1}{p!} \frac{\partial x^{i_1} \alpha_t \varphi^{-1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p} \alpha_t \varphi^{-1}}{\partial x^{j_p}} (\eta_{i_1 \dots i_p} \alpha_t) \cdot \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_p}. \tag{1.7.49}$$

Tento výraz definuje (prostřednictvím koeficientů) souřadnicové vyjádření křivky $t \mapsto \alpha_t^*\eta(x)$ pro každé $x \in U$. Podle věty o záměnnosti parciálních derivací

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial x^i \alpha_t \varphi^{-1}}{x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\mathrm{d}x^i \alpha_t \varphi^{-1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \tag{1.7.50}$$

Odsud už snadno dostaneme vyjádření

$$(\partial_\xi \eta)(x) = \frac{1}{p!} \left(p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i_1}} \eta_{k i_2 \dots i_p} + \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} \xi^k \right) \cdot \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}. \tag{1.7.51}$$

Výraz na pravé straně lze ovšem dále upravovat; složky diferenciální p-formy $\partial_\xi \eta$ dostaneme antisymetrizací koeficientů.

Teorém 1.27. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Buďte $p, q \geq 0$. Pak pro libovolné $\eta, \rho \in \Omega^p(X)$, $\omega \in \Omega^q(X)$, $a, b \in \mathbf{R}$ a libovolná hladká vektorová pole ξ, ζ na X*

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \eta &= i_\xi \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}i_\xi \eta, && (1.7.52)\\
\partial_\xi (a\eta + b\rho) &= a\partial_\xi \eta + b\partial_\xi \rho, && (1.7.53)\\
\partial_{a\xi + b\zeta} \eta &= a\partial_\xi \eta + b\partial_\zeta \eta, && (1.7.54)\\
\partial_\xi \mathrm{d}\eta &= \mathrm{d}\partial_\xi \eta, && (1.7.55)\\
\partial_\xi (\eta \wedge \omega) &= \partial_\xi \eta \wedge \omega + \eta \wedge \partial_\xi \omega, && (1.7.56)\\
i_{[\xi,\zeta]} \eta &= \partial_\xi i_\zeta \eta - i_\zeta \partial_\xi \eta, && (1.7.57)\\
\partial_{[\xi,\zeta]} \eta &= \partial_\xi \partial_\zeta \eta - \partial_\zeta \partial_\xi \eta. && (1.7.58)
\end{aligned}$$

(b) *Buď $\Phi : X \to Y$ hladké zobrazení variet, ξ (resp. ζ) hladké vektorové pole na X (resp. Y). Předpokládejme, že ξ a ζ jsou Φ-kompatibilní. Buď η hladká diferenciální p-forma na Y. Pak*

$$\Phi^* \partial_\zeta \eta = \partial_\xi \Phi^* \eta. \tag{1.7.59}$$

[14] Viz. souřadnicové vyjádření inverzního obrazu diferenciální formy.

DŮKAZ. 1. Určíme vyjádření diferenciální formy $i_\xi \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}i_\xi\eta$ vzhledem k souřadnicovému systému (U,φ), $\varphi = (x^i)$. Nechť η má vyjádření (1.7.9) a nechť $\xi = \xi^i(\partial/\partial x^i)$ vzhledem k (U,φ). Pak $i_\xi\eta$ má vyjádření (1.7.12) a $\mathrm{d}\eta$ má vyjádření (1.7.31). Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}i_\xi\eta + i_\xi\mathrm{d}\eta &= \left(\frac{1}{(p-1)!}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^{i_1}}\eta_{ki_2\dots i_p} + \frac{1}{p!}\frac{\partial\eta_{i_1\dots i_p}}{\partial x^k}\xi^k\right)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} + \\ &+ \frac{1}{(p-1)!}\xi^k\frac{\partial\eta_{ki_2\dots i_p}}{\partial x^{i_1}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} - \\ &- \frac{1}{p!}\frac{\partial\eta_{i_1\dots i_p}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k\wedge(\xi^{i_1}\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} - \dots + (-1)^{p-1}\xi^{i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_{p-1}}) \end{aligned} \tag{1.7.60}$$

a porovnáním s (1.7.51) vidíme, že stačí dokázat rovnost nule posledních dvou sčítanců; tuto rovnost ovšem snadno vyvodíme z antisymetrie výrazu $\partial\eta_{i_1\dots i_p}/\partial x^k$ v indexech $i_1,\dots,i_p$.

2. Vztahy (1.7.53)–(1.7.56) vyplývají z (1.7.52) a z elementárních vlastností operací s hladkými diferenciálními formami.

3. Dokážeme (1.7.57). Označme (α_t) lokální jednoparametrickou grupu vektorového pole ξ, zvolme bod $x \in X$ a vektory $\xi_1,\dots,\xi_{p-1} \in \mathsf{T}_xX$. Podle definice

$$\partial_\xi i_\zeta\eta(x)(\xi_1,\dots,\xi_{p-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t^* i_\zeta\eta(x)(\xi_1,\dots,\xi_{p-1})\Big|_{t=0}. \tag{1.7.61}$$

Pro derivovaný výraz ovšem dostaneme

$$\alpha_t^* i_\zeta\eta(x)(\xi_1,\dots,\xi_{p-1}) = \alpha_t^*\eta(x)(\mathsf{T}\alpha_{-t}(\zeta(\alpha_t(x))),\xi_1,\dots,\xi_{p-1}). \tag{1.7.62}$$

Derivováním tohoto výrazu podle t a využitím Teorému 1.17 dostaneme

$$\partial_\xi i_\zeta\eta(x)(\xi_1,\dots,\xi_{p-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t^*\eta(x)\Big|_{t=0}(\zeta,\xi_1,\dots,\xi_{p-1}) + \eta(x)([\xi,\zeta],\xi_1,\dots,\xi_{p-1}). \tag{1.7.63}$$

Odsud už přímo vyplývá (1.7.57).

4. Vztah (1.7.58) vyplývá přímo z (1.7.52), (1.7.57) a (1.7.55).

5. Zbývá dokázat (b). Všimněme si, že pro libovolnou p-formu ρ na Y platí

$$\Phi^* i_\zeta\rho = i_\xi\Phi^*\rho. \tag{1.7.64}$$

Z (1.7.52), (1.7.64) a (1.7.38) dostáváme

$$\Phi^*\partial_\zeta\eta = i_\xi\Phi^*\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\Phi^* i_\zeta\eta = i_\xi\mathrm{d}\Phi^*\eta + \mathrm{d}i_\xi\Phi^*\eta = \partial_\xi\Phi^*\eta, \tag{1.7.65}$$

což jsme chtěli dokázat.

1.8. Integrování forem na kompaktních množinách

Buď X n-rozměrná varieta. Řekneme, že dva souřadnicové systémy (U,φ), (V,ψ) na X jsou *souhlasně orientované*, jestliže $\det \mathrm{D}\varphi\psi^{-1} > 0$ na $\psi(U\cap V)$. Řekneme, že varieta X je *orientovatelná*, jestliže na X existuje atlas, jehož každé dva souřadnicové systémy jsou souhlasně orientované. Maximální atlas, jehož každé dva souřadnicové systémy jsou souhlasně orientované, se nazývá *orientace* variety X.

TEORÉM 1.28. *n-rozměrná varieta X je orientovatelná tehdy a jen tehdy, když existuje hladká diferenciální n-forma $\omega \in \Omega^n(X)$ taková, že $\omega(x) \neq 0$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že X je orientovatelná. Pak na X existuje spočetný atlas tvořený souřadnicovými systémy (U_k,φ_k), $\varphi_k = (x_k^i)$, $k = 1,2,\dots$, takový, že pro každé i,j $\det \mathrm{D}\varphi_i\varphi_j^{-1} > 0$ (Teorém 1.6). Pro každé k klademe $\omega_k = \mathrm{d}x_k^1\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_k^n$. Buď (χ_k), $k = 1,2,\dots$, rozklad jednotky na X, asociovaný s pokrytím (U_k) (Teorém 1.10). Z vlastností funkcí χ_k vyplývá, že je korektně definována diferenciální n-forma

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \omega_k. \tag{1.8.1}$$

Buď $x \in X$ libovolný bod, (U, φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém na X takový, že pouze konečný počet funkcí χ_k je na U různých od funkce nulové. Na U tedy platí

$$\omega = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \det \mathrm{D}\varphi_k \varphi^{-1} \right) \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{1.8.2}$$

Patří-li (U, φ) dané orientaci X, musí platit $\sum \chi_k \det \varphi_k \varphi^{-1} > 0$ na U; jelikož ω je hladká na U, splňuje všechny požadované podmínky.

Mějme diferenciální n-formu $\omega \in \Omega^n(X)$ takovou, že $\omega(x) \neq 0$ pro každé x. Předpokládejme, že ω je hladká. Nechť

$$\omega = f_\varphi \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{1.8.3}$$

je vyjádření ω vzhledem k souřadnicovému systému (U, φ), $\varphi = (x^i)$, na X. Podle předpokladu f_φ je hladká funkce na U taková, že buď $f_\varphi > 0$ nebo $f_\varphi < 0$. Uvažujme další souřadnicový systém (V, ψ) a předpokládejme, že $f_\varphi, f_\psi > 0$. Jelikož na $U \cap V$

$$f_\psi = (\det \mathrm{D}\psi\varphi^{-1}) \cdot f_\varphi, \tag{1.8.4}$$

musí platit $\det \mathrm{D}\psi\varphi^{-1} > 0$ na $\varphi(U \cap V)$. Stačí tedy prověřit, že souřadnicové systémy (U, φ), pro které $f_\varphi > 0$, tvoří atlas na X. K tomu si ovšem stačí uvědomit, že platí-li pro dané (U, φ), $\varphi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $f_\varphi < 0$, pak pro souřadnicový systém (U, ψ), $\psi = (-x^1, x^2, \ldots, x^n)$, již platí $f_\psi > 0$.

Důsledek. *Je-li souvislá varieta orientovatelná, pak existují právě dvě její orientace.*

Důkaz. Zvolme na souvislé orientovatelné varietě X všude různou od nuly hladkou diferenciální formu $\omega \in \Omega^n(X)$. Označme $\mathscr{O}r^+_\omega X$ (resp. $\mathscr{O}r^-_\omega X$) systém všech souřadnicových systémů (U, φ) na X takových, že $f_\varphi > 0$ (resp. $f_\varphi < 0$), kde f_φ je definováno vztahem (1.8.3). Sjednocení $\mathscr{O}r^+_\omega X \cup \mathscr{O}r^-_\omega X$ obsahuje všechny souřadnicové systémy na X a $\mathscr{O}r^+_\omega X \cap \mathscr{O}r^-_\omega X = \emptyset$. $\mathscr{O}r^+_\omega X$ a $\mathscr{O}r^-_\omega X$ jsou dvě různé orientace X a žádná další již neexistuje.

Hladká diferenciální n-forma $\omega \in \Omega^n(X)$, kde $n = \dim X$, v každém bodě různá od nulové formy, se nazývá *objemový element* na X. Teorém 1.28 lze tedy přeformulovat tak, že hladká varieta je orientovatelná tehdy a jen tehdy, jestliže na ní existuje globálně definovaný objemový element. Všimněme si, že objemový element není definován (danou orientací X) jednoznačně.

Buď ω objemový element na X. Souřadnicový systém (U, φ) se nazývá *pozitivní* vzhledem k ω, jestliže $f_\varphi > 0$. Orientace X, definovaná pozitivními souřadnicovými systémy, se nazývá *asociovaná* s objemovým elementem ω.

Příklady. (1) Každá varieta X, kterou lze pokrýt jediným souřadnicovým systémem, je orientovatelná; každý její globální souřadnicový systém (X, φ) definuje její orientaci jako množinu všech souřadnicových systémů (V, ψ), pro které $\det \mathrm{D}\varphi\psi^{-1} > 0$ na X. Tato orientace X se nazývá *asociovaná* s (X, φ).

(2) Varieta $\mathbf{R}^n$ a každá její otevřená podmnožina je orientovatelná varieta. Orientace $\mathbf{R}^n$, asociovaná s kanonickým globálním souřadnicovým systémem $(\mathbf{R}^n, \mathrm{id})$, se nazývá *kanonická*.

(3) Existují neorientovatelné variety; standardním příkladem je dvojrozměrná neorientovatelná varieta, známá jako *Möbiova páska*.

Zavedeme nyní pojem integrálu spojité diferenciální n-formy $\eta \in \Omega^n(X)$, kde $n = \dim X$, na kompaktní množině $\Omega \subset X$; budeme přitom předpokládat, že varieta X je orientovatelná a že je dána její orientace; v definici integrálu pak budeme používat pouze souřadnicové systémy patřící této orientaci.

Nechť $\mathscr{O}r X$ je orientace X. Předpokládejme zpočátku, že existuje souřadnicový systém $(U, \varphi) \in \mathscr{O}r X$, $\varphi = (x^i)$, tak, že $\Omega \subset U$. Nechť

$$\eta = f \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{1.8.5}$$

je souřadnicové vyjádření η vzhledem k (U,φ). Klademe

$$\int_\Omega \eta = \int_{\varphi(\Omega)} f\varphi^{-1}, \tag{1.8.6}$$

kde na pravé straně vystupuje integrál spojité funkce, definované na kompaktní množině $\varphi(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$. Číslo $\int_\Omega \eta$ je definováno korektně, t.j. nezávisle na volbě $(U,\varphi) \in \mathscr{O}rX$. Skutečně, zvolíme-li další souřadnicový systém $(V,\psi) \in \mathscr{O}rX$, $\psi = (y^j)$, tak, že $\Omega \subset V$ a vyjádříme-li η ve tvaru $\eta = g \cdot \mathrm{d}y^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^n$, bude na $U \cap V \supset \Omega$ platit $g = (\det \mathrm{D}\psi\varphi^{-1} \circ \varphi) \cdot f$ a podle věty o transformaci integračního oboru dostaneme

$$\int_{\psi(\Omega)} g\psi^{-1} = \int_{\psi\varphi^{-1}(\varphi(\Omega))} (\det \mathrm{D}\psi\varphi^{-1} \circ \varphi\psi^{-1}) \cdot (f\varphi^{-1} \circ \varphi\psi^{-1}) = \int_{\varphi(\Omega)} f\varphi^{-1}, \tag{1.8.7}$$

kde jsme využili předpoklad $\det \mathrm{D}\psi\varphi^{-1} = |\det \mathrm{D}\psi\varphi^{-1}| > 0$. Číslo $\int_\Omega \eta$ je tedy definováno korektně; nazývá se *integrál* diferenciální formy η na množině Ω.

Poznamenáváme, že $\int_\Omega \eta$ závisí na volbě orientace X; použijeme-li k jeho definici druhou ze dvou orientací X, dostaneme integrál, lišící se od integrálu $\int_\Omega \eta$ o znaménko.

Buď nyní $\Omega \subset X$ libovolná kompaktní množina. Existuje konečná posloupnost $(K_1, K_2, \ldots, K_N)$ kompaktních množin v X taková, že jsou splněny tyto podmínky:

(1) Pro každé i množina $\operatorname{int} K_i$ je neprázdná a množiny $\operatorname{int} K_i$ tvoří otevřené pokrytí Ω.
(2) Pro každé i existuje souřadnicový systém (U_i, φ_i), patřící orientaci $\mathscr{O}rX$, tak, že $K_i \subset U_i$.

Snadno lze zkonstruovat takovou posloupnost. Ke každému bodu $x \in X$ existuje souřadnicový systém (U_x, φ_x) tak, že $x \in U_x$, a množina $Q_x \subset U_x$ taková, že $x \in Q_x$ a $\varphi_x(Q_x) \subset \varphi_x(U_x)$ je uzavřený kvádr v $\mathbf{R}^n$. Množiny $\operatorname{int} Q_x$ tvoří otevřené pokrytí Ω a z kompaktnosti Ω vyplývá, že z tohoto pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí $\operatorname{int} Q_{x_1}, \ldots, \operatorname{int} Q_{x_N}$; klademe $K_i = Q_{x_i}$.

Uvažujme kompaktní množinu $\Omega \subset X$ a spojitou diferenciální formu $\eta \in \Omega^n(X)$. Nechť $(K_1, \ldots, K_N)$ je libovolná posloupnost s výše uvedenými vlastnostmi, nechť (χ_i), $1 \le i \le N$, je rozklad jednotky, asociovaný s pokrytím $(\operatorname{int} K_i)$ množiny $\bigcup \operatorname{int} K_i$. Pro každé i $K_i \cap \Omega$ je kompaktní množina (Teorém 1.3, (f)). Klademe

$$\int_\Omega \eta = \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i \cap \Omega} \chi_i \eta, \tag{1.8.8}$$

kde každý z N integrálů na pravé straně je definován vztahem (1.8.6). Číslo $\int_\Omega \eta$ je definováno korektně, t.j. nezávisle na výběru posloupnosti $(K_1, \ldots, K_N)$ a rozkladu jednotky (χ_i). Zvolíme-li jinou posloupnost $(J_1, \ldots, J_M)$ s vlastnostmi (1), (2) a rozklad jednotky (ζ_j), asociovaný s pokrytím $(\operatorname{int} J_j)$ množiny $\bigcup \operatorname{int} J_j$, dostaneme

$$\sum_{j=1}^{M} \int_{J_j \cap \Omega} \zeta_j \eta = \sum_{j=1}^{M} \int_{J_j \cap \Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} \chi_i \right) \zeta_j \eta = \sum_{i,j=1}^{N,M} \int_{Q_{ij}} \chi_i \zeta_j \eta, \tag{1.8.9}$$

kde $Q_{ij} = K_i \cap J_j \cap \Omega$; stejným způsobem lze vyjádřit i výraz na pravé straně (1.8.8). Číslo $\int_\Omega \eta$ se nazývá *integrál* spojité diferenciální n-formy η na kompaktní množině $\Omega \subset X$.

Je-li varieta X kompaktní, můžeme v (1.8.8) vzít $\Omega = X$.

Uvedeme některé elementární vlastnosti integrálu. *Nosičem* diferenciální formy η budeme nazývat uzávěr množiny $\{x \in X \mid \eta(x) \neq 0\}$; nosič diferenciální formy η je označován symbolem $\operatorname{supp} \eta$.

TEORÉM 1.29. *Platí následující tvrzení:*

(a) *Buď $\Omega \subset X$ kompaktní množina, $c \in \mathbf{R}$ libovolné číslo, η, ρ dvě diferenciální n-formy na X. Pak*

$$\int_\Omega (\eta + \rho) = \int_\Omega \eta + \int_\Omega \rho, \qquad \int_\Omega c \cdot \eta = c \int_\Omega \eta. \tag{1.8.10}$$

(b) *Buďte $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$ kompaktní množiny takové, že $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Nechť η je spojitá diferenciální forma na X a nechť $\operatorname{supp} \eta \subset \Omega_1$. Pak*

$$\int_{\Omega_1} \eta = \int_{\Omega_2} \eta. \tag{1.8.11}$$

DŮKAZ. (a) Tvrzení vyplývá přímo z definice.

(b) Nechť $(K_1, \dots, K_N)$ je posloupnost neprázdných kompaktních množin v X taková, že $\bigcup \operatorname{int} K_i \supset \Omega_1$ a ke každému i existuje souřadnicový systém (U_i, φ_i) tak, že $K_i \subset U_i$. Nechť dále $(L_1, \dots, L_M)$ je posloupnost neprázdných kompaktních množin v X taková, že $\bigcup \operatorname{int} L_j \supset \Omega_2 \setminus \bigcup \operatorname{int} K_i$; poznamenáváme, že množina $\Omega_2 \setminus \bigcup \operatorname{int} K_i$ je kompaktní (Teorém 1.3, (c)). Předpokládejme, že $L_j \cap \Omega_1 = \emptyset$ a ke každému j existuje souřadnicový systém (V_j, ψ_j) tak, že $L_j \subset V_j$. Pak posloupnost (K_i, L_j) splňuje všechny podmínky z definice integrálu. Nechť (χ_i, ζ_j) je rozklad jednotky, asociovaný s pokrytím (U_i, V_j) množiny Ω_2. Pak dostáváme

$$\int_{\Omega_2} \eta = \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i \cap \Omega_2} \chi_i \eta + \sum_{j=1}^{M} \int_{L_j \cap \Omega_2} \zeta_j \eta. \tag{1.8.12}$$

Z předpokladu $\operatorname{supp} \eta \subset \Omega_1$ a z toho, že $L_j \cap \Omega_1 = \emptyset$, vyplývá, že druhý sčítanec je roven nule. Úpravou prvního sčítance dojdeme k (1.8.11).

Buďte X, Y dvě n-rozměrné hladké variety, $\alpha : X \to Y$ difeomorfismus. Předpokládejme, že obě variety jsou orientovatelné a vyberme orientaci $\mathscr{O}r X$ na X a orientaci $\mathscr{O}r Y$ na Y. Řekneme, že α *zachovává orientaci*, platí-li pro každé $(V, \psi) \in \mathscr{O}r Y$, že $(\alpha^{-1}(V), \psi \circ \alpha) \in \mathscr{O}r X$. Buď $(V, \psi) \in \mathscr{O}r Y$ libovolný souřadnicový systém. Zachovává-li α orientaci a klademe-li $U = \alpha^{-1}(V)$, $\varphi = \psi \circ \alpha$, pak α má vzhledem k souřadnicovým systémům (U, φ), (V, ψ) vyjádření $\psi \alpha \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$; v každém bodě $x \in U$ tedy platí $\det \mathrm{D} \psi \alpha \varphi^{-1}(\varphi(x)) = 1$. Je-li varieta X souvislá (což má za důsledek souvislost variety $Y = \alpha(X)$), dostáváme následující jednoduché kriterium toho, kdy α zachovává orientaci.

TEORÉM 1.30. *Buďte X, Y hladké n-rozměrné souvislé orientované variety, buď $\mathscr{O}r X$ (resp. $\mathscr{O}r Y$) orientace X (resp. Y). K tomu, aby difeomorfismus $\alpha : X \to Y$ zachovával orientaci, stačí, aby existoval bod $x_0 \in X$, souřadnicový systém $(U, \varphi) \in \mathscr{O}r X$ v bodě x_0 a souřadnicový systém $(V, \psi) \in \mathscr{O}r Y$ v bodě $\alpha(x_0)$ tak, že $\alpha(U) \subset V$ a*

$$\det \mathrm{D} \psi \alpha \varphi^{-1}(\varphi(x_0)) > 0. \tag{1.8.13}$$

DŮKAZ. Zvolme objemový element ω (resp. η) na X (resp. Y) tak, aby s ním asociovaná orientace byla totožná s $\mathscr{O}r X$ (resp. $\mathscr{O}r Y$), a uvažujme funkci $h : X \to \mathbf{R}$ definovanou vztahem

$$\alpha^* \eta = h \cdot \omega. \tag{1.8.14}$$

Ukážeme, že funkce h je hladká a je různá od nuly v každém bodě $x \in X$. Zvome $x \in X$ libovolně a zvolme souřadnicové systémy $(U, \varphi) \in \mathscr{O}r X$, $\varphi = (x^i)$, $(V, \psi) \in \mathscr{O}r Y$, $\psi = (y^j)$, tak, že $x \in U$, $\alpha(U) \subset V$. Pak n-formy ω, η mají vyjádření

$$\omega = f \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n, \qquad \eta = g \cdot \mathrm{d}y^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^n, \tag{1.8.15}$$

kde podle předpokladu $f > 0$, $g > 0$. Dále forma $\alpha^* \eta$ má vyjádření

$$\alpha^* \eta = \frac{1}{f} (g \circ \alpha)(\det \mathrm{D} \psi \alpha \varphi^{-1} \circ \varphi) \cdot \omega, \tag{1.8.16}$$

odkud dostáváme, že na U platí

$$h = \frac{1}{f} (g \circ \alpha) \cdot (\det \mathrm{D} \psi \alpha \varphi^{-1} \circ \varphi). \tag{1.8.17}$$

h je tedy na U hladká a různá od nuly; z libovolnosti (U, φ), (V, ψ) vyplývá, že má tyto vlastnosti na X.

Varieta X je souvislá a h je spojitá, h tedy nemění znaménko na X a je $\operatorname{sgn} h = \operatorname{sgn} \det \mathrm{D} \psi \alpha \varphi^{-1}(\varphi(x))$ pro libovolný bod $x \in U$. Vezmeme-li za bod x bod x_0 a za (U, φ), (V, ψ) souřadnicové systémy s vlastnostmi, uvedenými v teorému, dostaneme $\operatorname{sgn} h = 1$, t.j. $h > 0$ na X. Ze vztahu (1.8.17), kde

$(U,\varphi) \in \mathscr{O}r X$, $(V,\psi) \in \mathscr{O}r Y$ jsou opět libovolné, pak dostaneme $\det \mathrm{D}\psi\alpha\varphi^{-1} > 0$ na $\varphi(U)$. Souřadnicové systémy (U,φ), $(\alpha^{-1}(V), \psi \circ \alpha)$ tedy patří stejné orientaci a $(\alpha^{-1}(V), \psi \circ \alpha) \in \mathscr{O}r X$.

Dokážeme nyní větu o transformaci integračního oboru pro difeomorfismy zachovávající orientaci.

TEORÉM 1.31. *Buďte X, Y dvě hladké n-rozměrné orientované variety, $\alpha : X \to Y$ difeomorfismus zachovávající orientaci, $\Omega \subset X$ kompaktní množina. Pak pro každou spojitou diferenciální n-formu η na Y platí*

$$\int_\Omega \eta = \int_{\alpha^{-1}(\Omega)} \alpha^* \eta. \tag{1.8.18}$$

DŮKAZ. 1. Nechť $\mathscr{O}r X$ (resp. $\mathscr{O}r Y$) je orientace X (resp. Y). Předpokládejme nejdříve, že existuje souřadnicový systém $(V,\psi) \in \mathscr{O}r Y$, $\psi = (y^j)$, tak, že $\Omega \subset Y$. Pak (U,φ), $\varphi = (x^i)$, kde $U = \alpha^{-1}(V)$, $\varphi = \psi \circ \alpha$, je souřadnicový systém na X, patřící orientaci $\mathscr{O}r X$. Buď $\eta \in \Omega^n(Y)$ libovolná n-forma. η má vzhledem k (V,ψ) vyjádření $\eta = f \cdot \mathrm{d}y^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^n$ a forma $\alpha^*\eta$ má vzhledem k (U,φ) vyjádření $\alpha^*\eta = (f \circ \alpha) \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$. Odtud podle definice integrálu

$$\int_{\alpha^{-1}(\Omega)} \alpha^*\eta = \int_{\psi\alpha(\alpha^{-1}(\Omega))} f \circ \alpha \circ (\psi\alpha)^{-1} = \int_{\psi(\Omega)} f \circ \psi^{-1} = \int_\Omega \eta. \tag{1.8.19}$$

2. Nechť nyní $\Omega \subset Y$ je libovolná kompaktní množina a $\eta \in \Omega^n(Y)$ libovolná forma. Podle definice integrálu napišme $\int_\Omega \eta$ ve tvaru

$$\int_\Omega \eta = \sum_{i=1}^N \int_{K_i \cap \Omega} \chi_i \eta, \tag{1.8.20}$$

kde $(K_1, \ldots, K_N)$ je posloupnost kompaktních množin v Y taková, že pro každé i $\operatorname{int} K_i \neq \emptyset$, existuje souřadnicový systém $(V_i, \psi_i) \in \mathscr{O}r Y$ na Y tak, že $K_i \subset V_i$ a $\bigcup \operatorname{int} K_i \supset \Omega$. Uvažujme posloupnost kompaktních množin $(\alpha^{-1}(K_1), \ldots, \alpha^{-1}(K_N))$ v X. Pro každé i platí $\operatorname{int} \alpha^{-1}(K_i) \neq 0$. Klademe $U_i = \alpha^{-1}(V_i)$, $\varphi_i = \psi_i \circ \alpha$; pak (U_i, φ_i) je souřadnicový systém na X, patřící orientaci $\mathscr{O}r X$ a $\alpha^{-1}(K_i) \subset U_i$. Dále $(\operatorname{int} \alpha^{-1}(K_i))$, $i = 1, 2, \ldots, N$, je otevřené pokrytí $\alpha^{-1}(\Omega)$, jelikož $\alpha^{-1}(\operatorname{int} K_i) = \operatorname{int} \alpha^{-1}(K_i)$. Posloupnost $(\alpha^{-1}(K_1), \ldots, \alpha^{-1}(K_N))$ může tedy být použita k definici integrálu na množině $\alpha^{-1}(\Omega) \subset X$. Uvažujme rozklad jednotky $\chi_i \circ \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, N$, asociovaný s pokrytím $(\operatorname{int} \alpha^{-1}(K_i))$ množiny $\alpha^{-1}(\Omega)$. Pro integrál $\int_{\alpha^{-1}(\Omega)} \alpha^*\eta$ dostáváme podle definice vyjádření

$$\int_{\alpha^{-1}(\Omega)} \alpha^*\eta = \sum_{i=1}^N \int_{\alpha^{-1}(K_i) \cap \alpha^{-1}(\Omega)} (\chi_i \alpha) \cdot \alpha^*\eta. \tag{1.8.21}$$

Ovšem $\alpha^{-1}(K_i) \cap \alpha^{-1}(\Omega) = \alpha^{-1}(K_i \cap \Omega)$, $(\chi_i\alpha) \cdot \alpha^*\eta = \alpha^*(\chi_i\eta)$ a tedy podle (1.8.19) a (1.8.20)

$$\int_{\alpha^{-1}(\Omega)} \alpha^*\eta = \sum_{i=1}^N \int_{\alpha^{-1}(K_i \cap \Omega)} \alpha^*(\chi_i\eta) = \sum_{i=1}^N \int_{K_i \cap \Omega} \chi_i \eta = \int_\Omega \eta, \tag{1.8.22}$$

což jsem chtěli dokázat.

Teorém 1.31 lze přeformulovat pro difeomorfismus α, nezachovávající orientaci; integrál na pravé straně (1.8.18) pak bude mít opačné znaménko.

Buď X hladká orientovatelná n-rozměrná varieta. Nechť I je otevřený interval, nechť každému $t \in I$ je přiřazena diferenciální forma $\eta_t \in \Omega^n(X)$, kde $n = \dim X$. Říkáme, že systém (η_t), $t \in I$, je *hladký jednoparametrický systém* n-forem, existuje-li objemový element ω na X tak, že funkce $I \times X \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}$, definovaná vztahem

$$\eta_t(x) = f(t,x) \cdot \omega(x), \tag{1.8.23}$$

je hladká. Je-li dán hladký jednoparametrický systém n-forem (η_t), $t \in I$, a jeho vyjádření ve tvaru (1.8.23), klademe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta_t = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \omega, \tag{1.8.24}$$

kde $\partial f/\partial t$ označuje tečné zobrazení k zobrazení $t \mapsto f(t,x) = f_x(t)$, t.j. $\partial f/\partial t = \mathsf{T}_t f_x \cdot 1$. Pak $\mathrm{d}\eta_t/\mathrm{d}t$ je také hladký jednoparametrický systém n-forem na X; nazývá se *derivace* systému (η_t) podle parametru.

TEORÉM 1.32. *Buď (η_t), $t \in I$, hladký jednoparametrický systém n-forem na hladké n-rozměrné varietě X, $\Omega \subset X$ kompaktní množina. Pak funkce $I \ni t \mapsto \int_\Omega \eta_t \in \mathbf{R}$ je diferencovatelná a platí*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \eta_t = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta_t. \tag{1.8.25}$$

DŮKAZ. Buď $\mathscr{O}r X$ orientace X. Zvolme posloupnost kompaktních množin $(K_1, \dots, K_N)$ v X tak, že pro každé i $\operatorname{int} K_i \neq 0$, existuje souřadnicový systém $(U_i, \varphi_i) \in \mathscr{O}r X$ tak, že $K_i \subset U_i$, a $\bigcup \operatorname{int} K_i \supset \Omega$. Nechť dále (χ_i), $1 \leq i \leq N$, je rozklad jednotky, asociovaný s pokrytím $(\operatorname{int} K_i)$ množiny $\bigcup \operatorname{int} K_i$. Pak podle definice

$$\int_\Omega \eta_t = \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i \cap \Omega} \chi_i \eta_t \tag{1.8.26}$$

pro každé $t \in I$. Forma η_t má vzhledem k (U_i, φ_i), $\varphi_i = (x_i^j)$, vyjádření

$$\eta_t = f_{i,t} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{1.8.27}$$

Pak

$$\int_{K_i \cap \Omega} \chi_i \eta_t = \int_{\varphi_i(K_i \cap \Omega)} \chi_i \varphi_i^{-1} \cdot f_{i,t} \varphi_i^{-1}. \tag{1.8.28}$$

Podle předpokladu funkce $(t,x) \mapsto f_{i,t}(x)$ je hladká na $I \times U_i$; funkce $(t,x') \mapsto f_{i,t}\varphi_i^{-1}(x')$ je tedy také hladká; podle věty o derivaci integrálu podle parametru funkce (1.8.27) je diferencovatelná a platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\varphi_i(K_i \cap \Omega)} \chi_i \varphi_i^{-1} \cdot f_{i,t}\varphi_i^{-1} = \int_{\varphi_i(K_i \cap \Omega)} \chi_i \varphi_i^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{i,t}\varphi_i^{-1}. \tag{1.8.29}$$

Odtud již přímo vyplývá diferencovatelnost funkce $t \mapsto \int_\Omega \eta_t$. Dosazením a využitím vyjádření (1.8.27) již snadno odvodíme vztah (1.8.25).

Označme $y^1, \dots, y^n$ standardní souřadnice na $\mathbf{R}^n$ a položme

$$\mathbf{R}^n_{(-)} = \{y \in \mathbf{R}^n \mid y^1(y) \leq 0\}, \tag{1.8.30}$$

$$\partial \mathbf{R}^n_{(-)} = \{y \in \mathbf{R}^n_{(-)} \mid y^1(y) = 0\}. \tag{1.8.31}$$

Podprostor $\mathbf{R}^n_{(-)}$ topologického prostoru $\mathbf{R}^n$ nazýváme *poloprostor* v $\mathbf{R}^n$; podprostor $\partial\mathbf{R}^n_{(-)}$ topologického prostoru $\mathbf{R}^n_{(-)}$ nazýváme *okraj* poloprostoru $\mathbf{R}^n_{(-)}$.

Buď X n-rozměrná varieta, $\Omega \subset X$ neprázdná množina, $x_0 \in \Omega$bod. Souřadnicový systém (U,φ), $\varphi = (x^i)$, na X v bodě x_0 se nazývá *adaptovaný* k Ω *v bodě* x_0, je-li množina $\varphi(\Omega \cap U)$ otevřená v $\mathbf{R}^n_{(-)}$. Je-li (U,φ) adaptovaný k Ω v bodě x_0, je adaptovaný k Ω v každém bodě $x \in \Omega \cap U$ a říkáme, že je *adaptovaný* k Ω. Množina Ω se nazývá *kousek* variety X, je-li kompaktní a existují souřadnicové systémy (U_k, φ_k), $1 \leq k \leq N$, adaptované k Ω, tak, že $\bigcup U_k \supset \Omega$.

Ke každému bodu $x_0 \in \operatorname{int}\Omega$ existuje souřadnicový systém (U,φ), $\varphi = (x^i)$, adaptovaný k Ω v x_0, takový, že $x^1(x) < 0$ pro všechna $x \in U$. Položme

$$\partial\Omega = \Omega \setminus \operatorname{int}\Omega. \tag{1.8.32}$$

Předpokládejme, že existuje souřadnicový systém (U,φ), $\varphi = (x^i)$, adaptovaný k Ω v bodě $x_0 \in \partial\Omega$. Potom pro každé $x \in \partial\Omega \cap U$ platí $x^1(x) = 0$; množina $\partial\Omega$ má tedy na U rovnici $x^1 = 0$. Je-li Ω kousek variety X, dostáváme odsud, že množina $\partial\Omega$ je $(n-1)$-rozměrná podvarieta variety X. Tato podvarieta se nazývá *okraj* kousku Ω.

Buď Ω kousek variety X. Snadno lze ukázat, že množina $\partial\Omega$ je kompaktní. Skutečně, $\Omega \subset X$ je kompaktní, je tedy uzavřená (Teorém 1.3, (e)); dále $\partial\Omega \subset \Omega$ a $\mathrm{cl}\,\Omega = \Omega$, takže $\mathrm{cl}\,\partial\Omega$ je množina kompaktní; ovšem $\partial\Omega = \mathrm{fr}\,\Omega$ je množina uzavřená, takže $\mathrm{cl}\,\partial\Omega = \partial\Omega$, a $\partial\Omega$ je kompaktní.

Buď $\Omega \subset X$ kousek, $x_0 \in \partial\Omega$ bod. Říkáme, že vektor $\xi \in \mathsf{T}_{x_0}X$ je orientován *vně* kousku Ω, jestliže existuje souřadnicový systém (U,φ), $\varphi = (x^i)$, na X, adaptovaný k Ω v bodě x_0, takový, že souřadnicové vyjádření ξ vzhledem k (U,φ), $\xi = \xi^i(\partial/\partial x^i)_{x_0}$, splňuje podmínku $\xi^1 > 0$.

Ukážeme, že tato definice je korektní, t.j. nezávislá na volbě souřadnicového systému (U,φ), adaptovaného k Ω v bodě x_0.

Nechť $(\bar{U},\varphi)$, $\bar{\varphi} = (\bar{x}^i)$, je další takový souřadnicový systém. Pak ξ má vyjádření $\xi = \bar{\xi}^j(\partial/\partial\bar{x}^j)_{x_0}$ a platí $\bar{\xi}^1 = (\partial\bar{x}^1/\partial x^k)\cdot\xi^k$, kde derivace je uvažována v bodě $\varphi(x_0)$. Ovšem v bodech množiny $U\cap\bar{U}\cap\partial\Omega$ platí

$$\bar{x}^1(0,x^1,\ldots,x^n) = 0. \tag{1.8.33}$$

Odtud dostáváme

$$\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2} = 0,\ldots,\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^n} = 0 \tag{1.8.34}$$

v bodě $\varphi(x_0)$ a tedy

$$\bar{\xi}^1 = \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}\xi^1. \tag{1.8.35}$$

Z toho, že oba souřadnicové systémy (U,φ), $(\bar{U},\bar{\varphi})$ jsou adaptované k Ω v bodě x_0, vyplývá, že funkce $x^1 \mapsto \bar{x}^1(x^1,x_0^2,\ldots,x_0^n)$, kde $\varphi(x_0) = (x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n)$, je rostoucí, t.j.

$$\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1} > 0 \tag{1.8.36}$$

a $\bar{\xi}^1 > 0$, což jsme chtěli ukázat.

Je-li (U,φ), $\varphi = (x^i)$, souřadnicový systém, adaptovaný k Ω v bodě $x_0 \in \partial\Omega$, pak vektor $(\partial/\partial x^1)_{x_0}$ je orientován vně kousku Ω.

Předpokládejme nyní, že varieta X je orientovatelná a zvolme její orientaci $\mathscr{O}rX$. Nechť (U_k,φ_k), $\varphi_k = (x_k^i)$, $1 \le k \le N$, jsou souřadnicové systémy na X, adaptované k Ω, takové, že $\bigcup U_k \supset \Omega$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že pro každé k platí $(U_k,\varphi_k) \in \mathscr{O}rX$. Klademe $V_k = U_k \cap \partial\Omega$, $\psi_k = (x_k^2,\ldots,x_k^n)$, kde funkce $x_k^2,\ldots,x_k^n$ uvažujeme zúžené na V_k. Dvojice (V_k,ψ_k), $1 \le k \le N$, tvoří hladký $\mathbf{R}^{n-1}$-atlas na $\partial\Omega$. Přitom podle definice pro každé k,l platí podle (1.8.34)

$$\det \mathrm{D}\varphi_k\varphi_l^{-1} = \frac{\partial x_k^1}{\partial x_l^1}\cdot\det \mathrm{D}\psi_k\psi_l^{-1}; \tag{1.8.37}$$

jelikož kromě toho $\det \mathrm{D}\varphi_k\varphi_l^{-1} > 0$ a $\partial x_k/\partial x_l > 0$ (1.8.36), dostáváme $\det \mathrm{D}\psi_k\psi_l^{-1} > 0$. Atlas $(V_k.\psi_k)$, $1 \le k \le N$, na $\partial\Omega$ je tedy tvořen souhladně orientovanými souřadnicovými systémy a $(n-1)$-rozměrná hladká varieta $\partial\Omega$ je tedy orientovatelná.

Orientace variety $\partial\Omega$, definovaná atlasem (V_k,ψ_k), $1 \le k \le N$, se nazývá *osociovaná* s orientací $\mathscr{O}rX$ variety X.

Poznámka. Asociovaná orientace $\partial\Omega$ je definovaná pomocí vektorů, orientovaných vně kousku Ω; kdybychom místo toho použili vektory opačné, t.j. orientované *dovnitř* Ω, dostali bychom orientaci opačnou k asociované orientaci $\partial\Omega$.

Přejdeme k formulaci teorému o integrování exaktních hladkých diferenciálních n-forem na kouscích n-rozměrné variety X (*Stokesova věta*). Všimněme si k tomu, že vzhledem ke kompaktnosti variety $\partial\Omega$ je definován (vztahem (1.8.8)) integrál $\int_{\partial\Omega}\eta$ pro každou hladkou formu $\eta \in \Omega^{n-1}(\partial\Omega)$.

Teorém 1.33 *Buď X hladká n-rozměrná orientovaná varieta, $\Omega \subset X$ kousek variety X. Uvažujme okraj $\partial\Omega$ kousku Ω s asociovanou orientací. Pak pro každou hladkou $(n-1)$-formu η, definovanou na okolí Ω, platí*

$$\int_{\partial\Omega}\eta = \int_{\Omega}\mathrm{d}\eta. \tag{1.8.38}$$

DŮKAZ. Vyjádříme každý z integrálů (1.8.38) pomocí definice (1.8.8); použijeme k tomu určitou speciální posloupnost $(K_1, \dots, K_N)$ kompaktních množin v X, pokrývající Ω.

Ke každému bodu $x \in \Omega$ existuje kompaktní množina $K_x \subset X$ a souřadnicový systém (U_x, φ_x) na X, adaptovaný k Ω v bodě x, tak, že $x \in \operatorname{int} K_x$, $K_x \subset U_x$ a $\varphi_x(K_x) \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřený kvádr. Pak zřejmě $\varphi_x(K_x \cap \Omega)$ je uzavřený kvádr v $\mathbf{R}^n_{(-)}$. Množiny $\operatorname{int} K_x$ tvoří otevřené pokrytí kompaktní množiny Ω. Vyberme jeho konečné podpokrytí $(\operatorname{int} K_{x_1}, \dots, \operatorname{int} K_{x_N})$ a položme $K_i = K_{x_i}$, $U_i = U_{x_i}$, $\varphi_i = \varphi_{x_i}$. Posloupnost (K_i), $1 \le i \le N$, spolu se souřadnicovými systémy (U_i, φ_i) má zřejmě vlastnosti, potřebné k definici integrálu.

Buď (χ_i), $1 \le i \le N$, rozklad jednotky, asociovaný s pokrytím $(\operatorname{int} K_i)$ množiny $\bigcup \operatorname{int} K_i$. Pak podle definice

$$\int_\Omega \mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^N \int_{K_i \cap \Omega} \chi_i \mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^N \int_{K_i \cap \Omega} \mathrm{d}(\chi_i \eta) - \sum_{i=1}^N \int_{K_i \cap \Omega} \mathrm{d}\chi_i \wedge \eta. \tag{1.8.39}$$

Ovšem podle Teorému 1.29, (b)

$$\int_{K_i \cap \Omega} \mathrm{d}\chi_i \wedge \eta = \int_\Omega \mathrm{d}\chi_i \wedge \eta, \tag{1.8.40}$$

takže pro druhý sčítanec dostáváme

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \mathrm{d}\chi_i \wedge \eta = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \mathrm{d}\chi_i \right) \wedge \eta = 0. \tag{1.8.41}$$

Pro každé i položme $L_i = K_i \cap \partial\Omega$, $V_i = U_i \cap \partial\Omega$ a označme ψ_i zúžení zobrazení φ_i na množinu $V_i \subset U_i$. L_i je kompaktní množina v $\partial\Omega$ a (V_i, ψ_i) je souřadnicový systém na $\partial\Omega$, přičemž z toho, že $K_i \subset U_i$, vyplývá $L_i \subset V_i$. Dále z toho, že množiny $\operatorname{int} K_i$ pokrývají Ω, vyplývá, že množiny $\operatorname{int} L_i$ pokrývají $\partial\Omega$. Posloupnost (L_i), $1 \le i \le N$, má tedy všechny vlastnosti, potřebné k definici integrálu na množině $\partial\Omega$.

Pro každé i označme ζ_i zúžení funkce $\chi_i : \bigcup \operatorname{int} K_i \to \mathbf{R}$ na množinu $\partial\Omega \subset \bigcup \operatorname{int} K_i$. Systém funkcí (ζ_i), $1 \le i \le N$, je rozklad jednotky, asociovaný s pokrytím $(\operatorname{int} L_i)$ množiny $\partial\Omega$. Dostáváme podle definice integrálu

$$\int_{\partial\Omega} \eta = \sum_{i=1}^N \int_{L_i \cap \partial\Omega} \zeta_i \eta = \sum_{i=1}^N \int_{K_i \cap \partial\Omega} \zeta_i \eta. \tag{1.8.42}$$

Porovnáním tohoto výrazu s (1.8.39) vidíme, že pro důkaz rovnosti (1.8.38) stačí dokázat, že pro každé i, $1 \le i \le N$, platí

$$\int_{K_i \cap \partial\Omega} \zeta_i \eta = \int_{K_i \cap \Omega} \mathrm{d}(\chi_i \eta). \tag{1.8.43}$$

Předpokládejme nejdříve, že $K_i \cap \partial\Omega = \emptyset$. Pak integrál na levé straně je nulový a stačí ukázat, že integrál na pravé straně je nulový. Uvažujme výše zavedený souřadnicový systém (U_i, φ_i), $\varphi_i = (x_j)$, na X. Forma η má vzhledem k (U_i, φ_i) vyjádření

$$\eta = f^j \omega_j, \tag{1.8.44}$$

kde

$$\omega_j = (-1)^{j-1} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j-1} \wedge \mathrm{d}x^{j+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{1.8.45}$$

Odtud

$$\mathrm{d}(\chi_i \eta) = \frac{\partial}{\partial x^j} (\chi_i f^j) \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{1.8.46}$$

Ovšem podle předpokladu $K_i \subset \operatorname{int} \Omega$ a tedy $K_i \cap \Omega = K_i$ a

$$\int_{K_i \cap \Omega} \mathrm{d}(\chi_i \eta) = \int_{K_i} \mathrm{d}(\chi_i \eta) = \int_{\varphi_i(K_i)} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\chi_i f^j \right) \tag{1.8.47}$$

(součet přes j). Uvažujme např. první z integrálů na pravé straně. Platí $\varphi_i(K_i) = [a,b] \times Q$, kde $[a,b] \subset \mathbf{R}$ a $Q \subset \mathbf{R}^{n-1}$ jsou uzavřené kvádry. Podle Fubiniovy věty

$$\int_{\varphi_i(K_i)} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\chi_i f^1\right) = \int_Q \left(\int_a^b \left(\chi_i f^1\right) \right) = \int_Q \left(\chi_i f^1\right)_b - \int_Q \left(\chi_i f^1\right)_a , \tag{1.8.48}$$

kde $(\chi_i f^1)_b$ (resp. $(\chi_i f^1)_a$) označuje zúžení funkce $\chi_i f^1$ na stěnu kvádru $\varphi_i(K_i)$ o rovnici $x^1 = b$ (resp. $x^1 = a$). Ovšem $\chi_i|_b = 0$, $\chi_i|_a = 0$, takže integrál (1.8.48) je roven nule. Analogicky se anulují další integrály (1.8.47). Celkově dostaneme

$$\int_{K_i \cap \Omega} \mathrm{d}(\chi_i \eta) = 0, \tag{1.8.49}$$

což jsme chtěli dokázat.

Předpokládejme nyní, že $K_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Forma η má opět vyjádření (1.8.44) a platí (1.8.46). Označme jako výše $\varphi_i(K_i) = [a,b] \times Q$. Bude $\varphi_i(K_i \cap \Omega) = [a,0] \times Q$. Z Fubiniovy věty dostáváme

$$\int_{K_i \cap \Omega} \mathrm{d}(\chi_i \eta) = \int_{\varphi_i(K_i \cap \Omega)} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\chi_i f^j\right) = \int_Q \left(\int_a^0 \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\chi_i f^1\right) \right) = \int_Q \left((\chi_i f^1)_0 - (\chi_i f^1)_a \right) = \int_Q \left(\chi_i f^1\right)_0 . \tag{1.8.50}$$

Na druhé straně platí podle předpokladu $K_i \cap \partial\Omega \subset U_i \cap \partial\Omega = V_i$. Vyjádříme integrál $\int_{K_i \cap \partial\Omega} \zeta_i \eta$ pomocí souřadnicového systému (V_i, ψ_i). Vzhledem k tomu, že $\partial\Omega$ má na U_i rovnici $x^1 = 0$, dostáváme pro zúžení formy η na podvarietu $\partial\Omega$ vyjádření

$$\eta = f^1|_{\partial\Omega} \cdot \omega_1. \tag{1.8.51}$$

Odsud

$$\int_{K_i \cap \partial\Omega} \zeta_i \eta = \int_{\psi_i(K_i \cap \partial\Omega)} \left(\zeta_i \circ \psi_i^{-1}\right) \left(f^1 \circ \psi_i^{-1}\right) \tag{1.8.52}$$

a naše tvrzení vyplývá z toho, že $Q = \psi_i(K_i \cap \partial\Omega)$.

Literatura

[1] D. W. Kahn, Introduction to Global Analysis, Academic Press, New York, 1980

[2] O. Kowalski, Elemente der Analysis auf Mannigfaltigkeiten, Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 39, Leipzig, 1981

[3] D. Krupka, J. Musilová, Integrální počet na Euklidových prostorech a diferencovatelných varietách, skriptum, SPN Praha, 1982

[4] S. Lang, Differential and Riemannian Manifolds, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] R. Narasimhan, Analysis on Real and Complex Manifolds, North-Holland, Amsterdam, 1968, 1985.

[6] S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 1983.

[7] L. Schwartz, Analiz, t. 2, Mir, Moskva, 1972 (překlad z francouzštiny)

[8] A. Švec, Úvod do teorie diferencovatelných variet, skriptum, SPN Praha, 1969